

Archimedische Anordnung in Fastringen

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
JOACHIM KUSEL
aus Hamburg

BREMEN 1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543102_0023

Archimedische Anordnung in Fastringen

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
JOACHIM KÜSEL
aus Hamburg

BREMEN 1972

Gutachter:

Prof. Dr. J. Timm, Bremen

Prof. Dr. D. Biallas, Hamburg

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
§1. Schwach geordnete Fastringe	7
§2. Archimedisches schwach angeordnete Fastringe	18
§3. Spezielle Klassen archimedisches schwach angeordneter Fastringe	28
§4. Spezielle Klassen archimedisches schwach quadratisch angeordneter Fastringe	42
§5. Fortsetzung archimedisches schwacher Anordnungen	54
Literaturverzeichnis	62

EINLEITUNG

Fastringe

In den letzten Jahren entwickelte sich zunächst die Theorie der assoziativen Fastringe (vgl. BERMAN und SILVERMAN [6]), insbesondere die Ideal- und Radikalthorie (siehe etwa FRÖHLICH [10],[11] und BEIDLEMAN [4],[5]), zu einer umfangreichen Disziplin. Hierbei ließen sich zahlreiche Ergebnisse der assoziativen Ringtheorie wesentlich verallgemeinern. Später wurde dann von TIMM in [49],[50],[51],[52] auch die algebraische Struktur nicht notwendig assoziativer Fastringe systematisch untersucht. Abgesehen von abstrakten axiomatischen Überlegungen (Beweistheorie, logische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der einzelnen Ring- und Körperaxiome) sind die Fastringe für den Algebraiker z.B. in der Gruppentheorie (Endomorphismen nichtabelscher Gruppen) und in der Theorie der scharf 2-fach und scharf 3-fach transitiven Permutationsgruppen (siehe dazu etwa KARZEL [25], KERBY und WEFELSCHIED [29],[30]) von besonderem Interesse. Aber nicht nur in der Algebra, sondern auch in anderen Gebieten der Mathematik (etwa der axiomatischen Geometrie oder der angewandten Mathematik) und der theoretischen Physik sind die assoziativen und nichtassoziativen Fastringe von Bedeutung, wie im folgenden am Beispiel der Geometrie näher ausgeführt werden soll.

Fastringe in der Geometrie

Bekanntlich zeigte HILBERT [18] bereits im Jahre 1899, daß sich jede desarguessche affine (mindestens 2-dimensionale) Geometrie als Koordinatengeometrie über einem Schiefkörper darstellen läßt. Seither versucht man, auch allgemeinere (nicht notwendig desarguessche projektive oder affine) Geometrien algebraisch zu charakterisieren, um geometrische Sätze mit algebraischen Methoden beweisen zu können. Bei den hierbei auftretenden algebra-

ischen Strukturen spielen die Fastringe (vgl. Def. (1.1)) eine besondere Rolle.

Während man im Falle der projektiven Geometrien der Lenz-Barlottiklassen IV - VII (siehe LENZ [31], BARLOTTI [3]) nach einem Satz von HALL [15] zu Quasikörpern (vgl. Def. (3.23)) als Koordinatenbereich gelangt, lassen sich, wie KARZEL in [25] zeigte, den desarguesschen projektiven Inzidenzgruppen spezielle Fastkörper (vgl. Def. (3.8)), die sog. normalen Fastkörper, zuordnen. KARZEL und MEISSNER [26] subsumierten die projektiven und affinen Inzidenzgruppen unter den Begriff der geschlitzten Inzidenzgruppen und bewiesen, daß sich die desarguesschen geschlitzten Inzidenzgruppen und die NL-Fastmoduln (das sind spezielle assoziative Fastringe) umkehrbar eindeutig entsprechen; insbesondere werden die desarguesschen affinen Inzidenzgruppen durch die affinen NL-Fastmoduln charakterisiert (siehe dazu PIEPER [36]).

Bei der Konstruktion verallgemeinerter affiner Räume, der sog. schwach affinen Räume, benutzte SPERNER [46] die von ihm eingeführten Rechts- $\mathcal{O}$ -Systeme (vgl. Def. (3.26)), und BIALLAS wies später darauf hin, daß bei diesem Verfahren auf die Kürzregel des Koordinatenbereichs verzichtet werden kann (siehe dazu auch SEIER [40]). Bei diesen algebraischen Strukturen handelt es sich um spezielle nicht notwendig assoziative Fastringe.

Geometrische und algebraische Anordnungen

Der Begriff der geometrischen Anordnung wurde erstmals von HILBERT axiomatisiert. Er zeigte in [18], daß jeder angeordneten desarguesschen affinen Geometrie ein angeordneter Schiefkörper entspricht und umgekehrt. Seitdem sind über die Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Anordnungen insbesondere durch die Arbeiten von SPERNER [43],[44],[45] über Ordnungs-

funktionen eine Reihe weiterer interessanter Ergebnisse bekannt geworden. So zeigte etwa PICKERT in [34], daß sich die geometrische Anordnung projektiver Geometrien der Lenz-Barlottiklassen II - VII und die algebraische Anordnung der zugehörigen cartesische Gruppen gegenseitig bedingen; und KARZEL untersuchte in [23] die Wechselwirkung zwischen der geometrischen und algebraischen Anordnung bei allgemeinen projektiven Ebenen und den nach HALL [16] zugehörigen Ternärkörpern.

Mit Hilfe algebraischer Methoden wurde dann gezeigt, daß es keine (echten) angeordneten projektiven Geometrien der Lenz-Barlottiklasse VII 1 gibt, indem PICKERT [34] aus Ergebnissen von SKORNJAKOV [41] und BRUCK, KLEINFELD [7] folgerte, daß jeder angeordnete Alternativkörper bereits ein Schiefkörper ist. Für eine spezielle Klasse schwach affiner Räume, die sog. Fastkörper-ebenen, zeigte KERBY in [28], daß sie genau dann schwach angeordnet (bzw. angeordnet) sind, wenn der zugehörige Fastkörper schwach angeordnet (bzw. angeordnet) ist (vgl. Def. (1.17), (1.20)).

Archimedische Anordnungen

Für die Grundlagen der Geometrie ist das archimedische Axiom in angeordneten Geometrien (für 3-Gewebe siehe dazu PICKERT [34]) von besonderer Bedeutung. Anschaulich gesprochen besagt es, daß man durch hinreichend häufiges Abtragen einer beliebigen Strecke von einem festen Punkt einer Geraden über jeden anderen Punkt dieser Geraden hinauskommt. Es folgt sofort (vgl. PICKERT [34]), daß eine projektive Geometrie der Lenz-Barlottiklassen II - VII genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn die zugehörige cartesische Gruppe archimedisch angeordnet ist.

Das archimedische Axiom impliziert nun weitreichende Eigenschaften der algebraischen Struktur der Koordinatenbereiche, die

wieder geometrisch interpretiert, interessante Folgerungen ergeben. So bewies HILBERT auch schon 1899 in [18], daß jeder archimedisch angeordnete Schiefkörper kommutativ ist. Also ist jede archimedisch angeordnete desarguessche projektive Ebene pappussch. Später wurde gezeigt, daß ein archimedisch angeordneter Körper sogar isomorph zu einem Unterkörper der reellen Zahlen sein muß (siehe etwa ARTIN [1]). Dieses Ergebnis wurde 1954 von HILBERT [19] wesentlich verallgemeinert, indem er bewies, daß die (bzgl. der natürlichen Ordnung angeordneten) Unterringe der reellen Zahlen die einzigen archimedisch angeordneten Ringe mit nichttrivialer Multiplikation sind.

Problemstellung

Offen blieb danach für den Algebraiker die Frage, ob bereits nur ein Distributivgesetz für eine ähnliche Verallgemeinerung ausreicht. In diesem Falle ergeben sich drei verschieden starke Anordnungsbegriffe (vgl. Def. (1.17), (1.20)). Zunächst gelang PICKERT [34] 1955 mit dem stärksten dieser Anordnungsbegriffe der Nachweis, daß ein archimedisch angeordneter Quasikörper (bis auf Isomorphie) ein Unterkörper der reellen Zahlen ist. Geometrisch gesehen bedeutet dieses, daß die archimedisch angeordneten projektiven Ebenen der Lenz-Barlottiklassen IV - VII (bis auf Isomorphie) genau die Unterebenen der reellen projektiven Ebene (und damit insbesondere pappussch) sind.¹⁾ Es gibt aber (echte) archimedisch angeordnete Vertreter der Lenz-Barlottiklassen II und III, wie die Beispiele von SPENCER [42] (Seite 256) und PICKERT [34] (Seite 93) zeigen.

1) PICKERT bewies in [34] weiterhin, daß jedes archimedisch angeordnete 3-Gewebe, das die Sechseckbedingung erfüllt, bereits isomorph zu einem (bzgl. der induzierten Ordnung) angeordneten Parallelengewebe der reellen affinen Ebene sein muß, indem er unter anderem nachwies, daß eine archimedisch angeordnete potenzassoziative Loop kommutativ ist.

Wie PICKERT also in [34] bewies, gibt es (bis auf Isomorphie) außer den reellen Unterkörpern keine archimedisch angeordneten Quasikörper. Wohl aber existieren echte archimedisch angeordnete cartesische Gruppen, deren Multiplikation sogar assoziativ und kommutativ ist ([34], Seite 93). Der wesentliche Unterschied in beiden Strukturen liegt in der einseitigen Distributivität, die der Quasikörper erfüllt. Das Ergebnis von PICKERT läßt sich also für nichtdistributive binäre Doppelstrukturen nicht verallgemeinern.

Es blieb nun die Frage, ob eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von PICKERT möglich ist, wenn man den Anordnungsbegriff oder die Voraussetzung an die algebraische Struktur abschwächt. Während HOFMANN [20] 1959 bewies, daß jede archimedisch angeordnete einseitig distributive Doppelloop mit potenzassoziativer Addition isomorph zu einem reellen Unterkörper ist, zeigte KERBY 1968 in [27], daß dieses auch für jeden archimedisch schwach angeordneten Fastkörper (vgl. Def. (2.3)) gilt.

Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wird nun eine systematische Analyse der Eigenschaften archimedisch schwach angeordneter Fastringe durchgeführt. Hierbei werden insbesondere die Ergebnisse von ARTIN, HION und PICKERT wesentlich verallgemeinert. So wird unter anderem in § 3 gezeigt, daß ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring bereits dann isomorph zu einem Unterring der reellen Zahlen ist, falls er negativ-treu (3.1) oder assoziativ (3.36) oder linksregulär und rechtslösbar (3.18) ist.

In § 4 wird ein Konstruktionsverfahren angegeben, mit dem man sämtliche archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastringe erhält. Dieses Verfahren ermöglicht nun eine detaillierte Untersuchung der algebraischen Struktur archimedisch schwach qua-

dratisch angeordneter Fastringe. So zeigt sich, daß der Satz von ARTIN und HION für schwach quadratisch angeordnete rechtsunitäre Fastringe ebenso verallgemeinert werden kann (4.37), wie für (schwach quadratisch angeordnete) rechtsalternative Fastringe, die linksregulär (4.32) oder linkslösbar (4.34) sind.

Im letzten Paragraphen dieser Arbeit wird schließlich die auf PICKERT und BANASCHEWSKI zurückgehende Frage der Fortsetzung einer archimedisch schwachen Anordnung eines Fastrings auf einen algebraischen rechtsunitären Oberfastring (vgl. Def. (5.23)) vollständig gelöst.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt aus einer Vorlesung über algebraische Ordnungen [53], die mein Lehrer Prof. Dr. J. TIMM im WS 70/71 an der Universität Hamburg hielt. Ihm möchte ich an dieser Stelle für die vielfache Unterstützung danken.

§1. SCHWACH GEORDNETE FASTRINGE

In diesem Paragraphen werden Definitionen und einfache Aussagen gegeben, die als algebraische und ordnungstheoretische Grundlagen für die Theorie der archimedisch schwach geordneten Fastringe notwendig sind. Der interessierte Leser sei auf die Arbeiten von TIMM [47],[49],[50],[51],[52] verwiesen, denen die algebraischen Definitionen zum größten Teil entnommen sind. Die Grundbegriffe der Ordnungstheorie seien im folgenden als bekannt vorausgesetzt; man findet sie etwa bei FUCHS [12],[13],[14].

DEF. 1.1. Eine binäre Doppelstruktur $F(+, \circ)$ heißt Fastring, falls $F(+)$ eine Gruppe ist und $\forall a, b, c \in F$ das Linksdistributivgesetz $a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c$ gilt.

Ein Fastring $F(+, \circ)$ ist also eine durch Termengleichungen definierte universelle Algebra $F(\Omega)$ (vgl. MC KINSEY [32]) mit dem Operatorenbereich $\Omega := \{0, -, +, \circ\}$ vom Typ $\langle 0, 1, 2, 2 \rangle$. Natürlich definiert man dann:

DEF. 1.2. Seien $F_1(+, \circ)$ und $F_2(+, \circ)$ Fastringe. Eine Abbildung $f: F_1 \rightarrow F_2$ heißt Homomorphismus von $F_1(+, \circ)$ in $F_2(+, \circ)$, falls $\forall a, b \in F_1$ $f(a+b) = f(a)+f(b)$ und $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ ist; ein Isomorphismus von $F_1(+, \circ)$ auf $F_2(+, \circ)$ ist ein bijektiver Homomorphismus von $F_1(+, \circ)$ in $F_2(+, \circ)$.

DEF. 1.3. $K(+, \circ)$ sei ein Schiefkörper. Ein Fastring $F(+, \circ)$ heißt rechts-(links-)seitige Fastalgebra über K , falls $F(+)$ ein Rechtsvektorraum über K und $\forall a, b \in F, \forall k \in K$ $(a \circ b)k = a \circ (bk)$ (bzw. $(a \circ b)k = (ak) \circ b$) ist, und beidseitige Fastalgebra, falls beide Regeln erfüllt sind.

Da die Multiplikation eines Fastrings nicht notwendig assoziativ sein muß, definiert man:

DEF. 1.4. Ein Fastring $F(+, \circ)$ heißt

assoziativ, falls $F(\circ)$ eine Halbgruppe ist;

biassoziativ, falls je zwei Elemente $a, b \in F$ einen assoziativen Unterfastring erzeugen;

rechts-(links-)alternativ, falls $\forall a, b \in F \quad (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b)$ (bzw. $a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b$) ist;

potenzassoziativ, falls jedes Element $a \in F$ multiplikativ eine Halbgruppe erzeugt.

In einem (nicht notwendig assoziativen) Fastring $F(+, \circ)$ werden $\forall a \in F, \forall n \in \mathbb{N}$ die Potenzen von a wie folgt definiert: $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a \circ a^n$.

Aus der Definition (1.4) folgt unmittelbar:

(1.5). Jeder assoziative Fastring ist biassoziativ; jeder biassoziative Fastring ist alternativ und potenzassoziativ.

Im folgenden werden, falls nicht ausdrücklich anders vermerkt, nicht notwendig assoziative Fastringe betrachtet.

DEF. 1.6. Ein Element $e \in F$ eines Fastrings $F(+, \circ)$ heißt

rechts-(links-)neutral, falls $\forall a \in F \quad a \circ e = a$ (bzw. $e \circ a = a$) ist;

Einselement, falls es rechts- und linksneutral ist.

Es gilt:

(1.7). Ist $F(+, \circ)$ ein Fastring mit $F \neq \{0\}$ und $e \in F$ ein rechtsneutrales Element, so ist $e \neq 0$.

(1.8). Jeder Fastring besitzt höchstens ein Einselement.

Da in einem Fastring nicht notwendig $0 \circ a = 0$ und $(-a) \circ b = -a \circ b$ sein muß, definiert man:

DEF. 1.9. Ein Fastring $F(+, \circ)$ heißt

nullsymmetrisch, falls $\forall a \in F \quad 0 \circ a = 0$ ist;

negativ-treu, falls $\forall a, b \in F \quad (-a) \circ b = -a \circ b$ ist;

nullteilerfrei, falls $\forall a, b \in F^*$ auch $a \circ b \in F^*$ ist;

rechts-(links-)unitär, falls er ein rechts-(links-)neutrales Element enthält;

unitär, falls er ein Einselement enthält;

rechts-(links-)regulär, falls $\forall a \in F^*, \forall b, c \in F$ mit $b \neq c$ auch $a \circ b \neq a \circ c$ (bzw. $b \circ a \neq c \circ a$) ist;

rechts-(links-)lösbar, falls $\forall a \in F^*, \forall b \in F$ die Gleichung $a \circ x = b$ (bzw. $x \circ a = b$) in F lösbar ist;

rechts-(links-)eindeutiglösbar, falls $\forall a \in F^*, \forall b \in F$ die Gleichung $a \circ x = b$ (bzw. $x \circ a = b$) in F eindeutig lösbar ist (d.h. $F(+, \circ)$ ist rechts-(links-)regulär und rechts-(links-)lösbar).

Der Zusatz "rechts" ("links") wird genau dann weggelassen, wenn die entsprechende Eigenschaft sowohl rechts als auch links gilt.

Aus der Definition (1.9) folgt sofort:

(1.10). Ein Fastring ist genau dann nullteilerfrei, wenn er rechtsregulär ist.

(1.11). Jeder bilassoziative linksreguläre Fastring ist nullsymmetrisch.

(1.12). Ist $F(+, \circ)$ ein linkslösbarer rechtsregulärer Fastring, so ist $F(+, \circ)$ nullsymmetrisch.

Beweis: Sei $a \in F^*$. Dann gibt es ein Element $x \in F$ mit $x \circ a = 0$, und da $F(+, \circ)$ nach (1.10) nullteilerfrei ist, folgt: $x = 0$. Also ist $0 \circ a = 0$.

(1.13). (TIMM [50]) Ein nullsymmetrischer Fastring ist genau dann regulär, wenn er linksregulär ist.

Offenbar ist ein rechtsunitärer Fastring $F(+, \circ, e)$ mit $e^2 = 0$ (bzgl. "+") kommutativ und negativ-treu. Für rechtsunitäre Fastringe, die nicht die Charakteristik 2 besitzen, gilt:

(1.14). Ist $F(+, \cdot)$ ein Fastring und gibt es ein Element $e \in F$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

- (i) $\forall a \in F^* \text{ ist } (-e) \cdot a \neq a,$
- (ii) $\forall a \in F^* \text{ ist } (-e) \cdot ((-e) \cdot a) = a,$

so ist $F(+)$ genau dann kommutativ, wenn $\forall a \in F^* \quad (-e) \cdot a = -a$ ist.

Beweis: Sei $F(+)$ kommutativ und $a \in F$. Dann ist nach (ii)

$$(-e) \cdot (a + (-e) \cdot a) = (-e) \cdot a + (-e) \cdot ((-e) \cdot a) = (-e) \cdot a + a = a + (-e) \cdot a;$$

und damit folgt aus (i): $a + (-e) \cdot a = 0$, d.h. es ist $(-e) \cdot a = -a$.

Umgekehrt folgt aus $(-e) \cdot a = -a \quad \forall a \in F$ für je zwei Elemente $a, b \in F$:

$$\begin{aligned} a + b &= -(-(a+b)) = -((-e) \cdot (a+b)) = -((-e) \cdot a + (-e) \cdot b) = -(-a - b) = \\ &= b + a, \text{ d.h. } F(+) \text{ ist kommutativ.} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also:

(1.15). Ein linksalternativer linksregulärer unitärer Fastring $F(+, \cdot, e)$ ist genau dann (bzgl. "+") kommutativ, wenn $\forall a \in F \quad (-e) \cdot a = -a$ ist.

(1.16). Ein assoziativer linksregulärer unitärer Fastring ist genau dann (bzgl. "+") kommutativ, wenn er negativ-treu ist.

DEF. 1.17. Sei $F(+, \cdot)$ ein Fastring und $F(\leq)$ eine Halbordnung.

$F(+, \cdot, \leq)$ heißt schwach geordneter Fastring, falls $F(+, \leq)$ eine geordnete Gruppe (d.h. $\forall a, b, c \in F$ mit $a \leq b$ ist $a + c \leq b + c$ und $c + a \leq c + b$) und $\forall a, b \in F$ mit $a, b \geq 0$ auch $a \cdot b \geq 0$ ist.

(1.18). Ist $F(+, \cdot)$ ein Fastring und $F(+, \leq)$ eine geordnete Gruppe, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ genau dann schwach geordnet, wenn $\forall a, b, c \in F$ mit $a \leq b$ und $c \geq 0$ auch $c \cdot a \leq c \cdot b$ ist.

In schwach geordneten Fastringen ist i.allg. weder $a \cdot b \geq 0$, falls $a, b \leq 0$ ist, noch folgt aus $a \leq b$ und $c \geq 0$: $a \cdot c \leq b \cdot c$, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

BSF. 1.19. Sei $F(+, \leq)$ eine beliebige geordnete Gruppe und $\forall a, b \in F$
 $a \cdot b := \begin{cases} 0, & \text{falls } a = 0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $F(+, \cdot, \leq)$ offenbar ein schwach

geordneter (assoziativer rechtseindeutiglösbarer linksunitärer nullsymmetrischer) Fastring und $\forall a, b \in F^*$ mit $b > 0$ gilt: $a \cdot b > 0$; insbesondere ist also $a \cdot c < 0 \cdot c$, falls $a < 0$ und $c > 0$ ist.

Deshalb definieren wir:

DEF. 1.20. Ein schwach geordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ heißt schwach quadratisch geordnet, falls $\forall a, b \in F$ mit $a, b \leq 0$ gilt: $a \cdot b \geq 0$;

geordnet, falls $\forall a, b \in F$ mit $a \leq b$ und $c \geq 0$ auch $a \cdot c \leq b \cdot c$ ist; schwach angeordnet, falls $F(<)$ eine Totalordnung (lineare Ordnung, Kette) ist.

(1.21). Ein schwach geordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann schwach quadratisch geordnet, wenn $\forall a, b, c \in F$ mit $a \leq b$ und $c \leq 0$ gilt: $c \cdot a \geq c \cdot b$.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß der hier definierte Begriff des geordneten Fastrings von dem, wie er bei KERBY [27] und PILZ [37] definiert wird, abweicht. Einen in dieser Arbeit als geordnet bezeichneten Fastring nennt KERBY voll geordnet, ein schwach geordneter Fastring ist im Sinne von KERBY und PILZ geordnet. Die hier gegebene Begriffsbildung erscheint aus folgendem Grund natürlicher: Ist $F(+, \cdot)$ ein Fastring, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ genau dann (an-)geordnet, wenn $F(\Omega, \leq, \mathcal{M})$ mit dem Operatorenbereich $\Omega := \{0, -, +, \cdot\}$ und den Monotoniebereichen $M_0 = M_- = M_+ = F$, $M_\circ := \{x \in F; x \geq 0\}$ eine (an-)geordnete universelle Algebra vom Monontyp $\langle\langle \uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow \rangle\rangle$ ist (siehe dazu FUCHS [12], TIMM [53]).

Ebenso wie in geordneten Gruppen und Ringen läßt sich auch in schwach geordneten Fastringen die algebraische Ordnung durch einen Positivitätsbereich kennzeichnen. Dazu definiert man:

DEF. 1.22. Sei $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach geordneter Fastring. Ein

Element $a \in F$ heißt

positiv (negativ), falls $a \geq 0$ (bzw. $a \leq 0$) ist;

streng positiv (streng negativ), falls $a > 0$ (bzw. $a < 0$) ist.

Die Menge $P(F) := \{x \in F; x \geq 0\}$ der positiven Elemente von F heißt der Positivitätsbereich von $F(+, \cdot, \leq)$.

Wie in jeder geordneten Gruppe ist $\forall a, b \in F$ genau dann $a \leq b$, wenn $b - a \in P(F)$ ist. Der Positivitätsbereich eines schwach geordneten Fastringes wird nun durch die folgende Aussage charakterisiert:

(1.23). Eine Teilmenge $P \subset F$ eines Fastringes $F(+, \cdot)$ ist genau dann der Positivitätsbereich einer schwachen algebraischen Ordnung auf $F(+, \cdot)$, wenn P ein konischer normaler Unterhalbfastring von $F(+, \cdot)$ ist, d.h. es gilt:

(i) $P \cap -P = \{0\},$

(ii) $P + P \subset P,$

(iii) $\forall a \in F$ ist $a + P - a \subset P,$

(iv) $P \cdot P \subset P.$

Offenbar gilt weiterhin für einen schwach geordneten Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ mit dem Positivitätsbereich $P := P(F)$:

(1.24). $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann schwach quadratisch geordnet, wenn $(-P) \cdot (-P) \subset P$ ist;

$F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann geordnet, wenn $\forall a, b, c \in F$ mit $a - b, c \in P$ auch $a \cdot c - b \cdot c \in P$ ist;

$F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann schwach angeordnet, wenn $P \cup -P = F$ ist; ist $F(+, \cdot, \leq)$ schwach quadratisch angeordnet, so ist das Quadrat jedes Elements $a \in F$ positiv.

(1.25). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein (schwach) (quadratisch) (an-)geordneter Fastring und $U \subset F$ ein Unterfastring von $F(+, \cdot)$, so ist auch $U(+, \cdot, \leq)$ mit der von $F(\leq)$ auf U induzierten Ordnung $P(U) := U \cap P(F)$

(schwach) (quadratisch) (an-)geordnet.

DEF. 1.26. Seien $F_i(+, \circ, \leq)$ ($i = 1, 2$) schwach geordnete Fastri-
ge. Ein Homomorphismus $f: F_1(+, \circ) \rightarrow F_2(+, \circ)$ heißt o-Homomorphis-
mus (Ordnungshomomorphismus), falls f isoton ist (d.h. $\forall a, b \in F_1$
mit $a \leq b$ ist $f(a) \leq f(b)$);

ein surjektiver o-Homomorphismus $f: F_1(+, \circ, \leq) \rightarrow F_2(+, \circ, \leq)$ heißt
o-Epimorphismus, falls es zu je zwei Elementen $b_1, b_2 \in F_2$ mit
 $b_1 \leq b_2$ Elemente $a_1, a_2 \in F_1$ gibt mit $a_1 \leq a_2$ und $f(a_i) = b_i$ ($i=1, 2$);
ein Isomorphismus $f: F_1(+, \circ) \rightarrow F_2(+, \circ)$ heißt o-Isomorphismus,
falls f und f^{-1} o-Homomorphismen sind (vgl. etwa FUCHS [12]).

Es gilt dann:

(1.27). Ein Homomorphismus $f: F_1(+, \circ) \rightarrow F_2(+, \circ)$ ist genau dann
ein o-Homomorphismus, wenn $f(P(F_1)) \subset P(F_2)$ ist;
ein Epimorphismus (Isomorphismus) $f: F_1(+, \circ) \rightarrow F_2(+, \circ)$ ist genau
dann ein o-Epimorphismus (o-Isomorphismus), wenn
 $f(P(F_1)) = P(F_2)$ ist.

Beweis: Sei $f: F_1(+, \circ, \leq) \rightarrow F_2(+, \circ, \leq)$ ein o-Epimorphismus und
 $b \in F_2$ mit $b \geq 0$. Dann gibt es nach (1.26) zwei Elemente $a_1, a_2 \in F_1$
mit $a_1 \leq a_2$ und $f(a_1) = 0$, $f(a_2) = b$. Daraus folgt für $a := a_2 - a_1$:
 $a \in P(F_1)$ und $f(a) = f(a_2) - f(a_1) = b$. Also ist $f(P(F_1)) = P(F_2)$.
Ist umgekehrt f ein Epimorphismus von $F_1(+, \circ)$ auf $F_2(+, \circ)$ mit
 $f(P(F_1)) = P(F_2)$, so ist f isoton. Sei $b_1, b_2 \in F_2$ mit $b_1 \leq b_2$. Dann
ist $b_2 - b_1 \in P(F_2)$, und somit gibt es ein Element $a \in P(F_1)$ mit
 $f(a) = b_2 - b_1$. Da f surjektiv ist, gibt es ein Element $a_1 \in F_1$ mit
 $f(a_1) = b_1$; sei $a_2 := a + a_1$. Dann ist $f(a_2) = f(a) + f(a_1) =$
 $= b_2 - b_1 + b_1 = b_2$ und $a_2 - a_1 = a \geq 0$, d.h. $a_1 \leq a_2$.

Aus (1.27) folgt unmittelbar:

(1.28). Jeder injektive o-Epimorphismus ist ein o-Isomorphismus.

Es gibt aber surjektive o-Homomorphismen, die keine o-Epi-

morphismen sind, wie das folgende Beispiel zeigt:

BSP. 1.29. Seien $F_i(+, \circ, \leq)$ die schwach geordneten Fastringe mit $F_i(+, \circ) := R(+, \circ)$ ($i = 1, 2$) und $P(F_1) := P(Q)$, $P(F_2) := P(R)$. Dann ist die identische Abbildung id_R von R zwar ein bijektiver o-Homomorphismus von $F_1(+, \circ, \leq)$ auf $F_2(+, \circ, \leq)$, aber kein o-Isomorphismus.

Es gilt aber:

(1.30). Ist der Fastring $F_1(+, \circ, \leq)$ schwach angeordnet und $f: F_1(+, \circ, \leq) \rightarrow F_2(+, \circ, \leq)$ ein surjektiver o-Homomorphismus, so ist f sogar ein o-Epimorphismus; insbesondere ist dann auch $F_2(+, \circ, \leq)$ schwach angeordnet.

Beweis: Es ist $F_2 = f(F_1) = f(P(F_1) \cup -P(F_1)) = f(P(F_1)) \cup -f(P(F_1)) \subset P(F_2) \cup -P(F_2) \subset F_2$. Also ist $f(P(F_1)) = P(F_2)$ und $P(F_2) \cup -P(F_2) = F_2$, d.h. f ist ein o-Epimorphismus und $F_2(+, \circ, \leq)$ ist schwach angeordnet.

(1.31). Die o-Automorphismen eines schwach geordneten Fastrings $F(+, \circ, \leq)$ bilden eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $F(+, \circ)$.

Aus der Definition (1.20) folgt natürlich, daß ein schwach geordneter distributiver Fastring (Ring) sowohl schwach quadratisch geordnet als auch geordnet ist. Für nicht notwendig distributive Fastringe gilt nun offenbar:

(1.32). Jeder schwach geordnete negativ-treue Fastring ist schwach quadratisch geordnet.

(1.33). Jeder schwach quadratisch angeordnete Fastring ist nullsymmetrisch.

(1.34). Jeder geordnete nullsymmetrische Fastring ist schwach quadratisch geordnet; jeder schwach quadratisch geordnete Fastring ist schwach geordnet.

(1.35). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein geordneter Fastring, so gilt

- (i) $\forall a, b, c \in F$ mit $a \leq b$ und $c \leq 0$: $a \cdot c \geq b \cdot c$;
- (ii) $\forall a, b, c, d \in F$ mit $a \leq b$, $c \leq d$ und $a, d \geq 0$ oder $b, c \geq 0$:
 $a \cdot c \leq b \cdot d$;
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in F$ mit $0 \leq a < b$: $0 \leq a^n < b^n$.

(1.36). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein geordneter nullsymmetrischer Fastring, so gilt $\forall a, b, c, d \in F$ mit $a \leq b$, $c \leq d$ und $a, d \leq 0$ oder $b, c \leq 0$:
 $a \cdot c \geq b \cdot d$.

(1.37). Jeder nichttrivial schwach geordnete Fastring besitzt unendlich viele Elemente.

Also ist jeder schwach geordnete endliche Fastring trivial geordnet.

(1.38). Jeder schwach angeordnete Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ besitzt die Charakteristik 0 (d.h. $F(+)$ ist torsionsfrei).

Die Aussagen (1.37) und (1.38) gelten bereits für (an-)geordnete Gruppen.

(1.39). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach angeordneter Fastring mit $F \neq \{0\}$, so gilt für jedes rechtsneutrale Element $e \in F$: $e > 0$.

Beweis: Nach (1.7) ist $e \neq 0$. Wäre $e < 0$, so würde folgen:
 $e = (-e) \cdot (-e) \geq 0$; also ist $e > 0$.

Diese Aussage gilt für linksneutrale Elemente nicht, wie das Beispiel (1.19) zeigt.

(1.40). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein schwach angeordneter (bzgl. "+") kommutativer rechtsunitärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und ist $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $x \cdot a = e$ in F lösbar, so enthält $F(+, \cdot)$ einen (bzgl. der induzierten Ordnung) zu $\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$ o-isomorphen Primkörper $\Pi(+, \cdot, \leq)$ und ist (bzgl. der Multiplikation " $\cdot$ ") eine rechtsseitige Fastalgebra über Π .

Beweis: Nach (1.39) ist $e > 0$ und nach (1.38) ist $F(+)$ torsionsfrei. Also gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Element $y \in F$ mit $yn = y \cdot (en) = e$, und somit ist $x := y_n$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $xn = em$. Offenbar ist

dann die Abbildung $f: \begin{cases} Q \longrightarrow F \\ \frac{m}{n} \longrightarrow x \text{ mit } xn = em \end{cases}$ ein injektiver

$\circ$ -Homomorphismus von $Q(+, \cdot, \leq)$ in $F(+, \cdot, \leq)$. Sei $\Pi := f(Q)$. Dann ist also $\Pi(+, \cdot, \leq)$ ein zu $Q(+, \cdot, \leq)$ $\circ$ -isomorpher Unterkörper von $F(+, \cdot, \leq)$. Der Rest der Behauptung folgt nun wie bei TIMM [50], Aussage (2.2).

(1.41). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach angeordneter Fastring, so gilt $\forall a, b \in F$ mit $a \geq 0$ und $a \cdot b > 0$: $b > 0$.

I. allg. folgt aus $a \cdot b > 0$ und $b \geq 0$ nicht $a > 0$, wie das Beispiel (1.19) zeigt; es gilt aber:

(1.42). Ein schwach angeordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann schwach quadratisch angeordnet, wenn er nullsymmetrisch ist und $\forall a, b \in F$ mit $a \cdot b \neq 0$ gilt: genau dann ist $a \cdot b > 0$, wenn entweder $a, b > 0$ oder $a, b < 0$ ist.

DEF. 1.43. Wir sagen, der Fastring $F(+, \cdot)$ besitzt Inverse, wenn er unitär ist (e sei das Einselement) und für jedes Element $a \in F^*$ die Gleichung $x \cdot a = a \cdot x = e$ genau eine Lösung x in F besitzt, die dann mit a^{-1} bezeichnet wird.

(1.44). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein schwach angeordneter Fastring mit Inversen, so gilt $\forall a \in F^*$: genau dann ist $a > 0$, wenn $a^{-1} > 0$ ist.

Beweis: O.B.d.A. sei $F \neq \{0\}$ und $a \in F^*$. Dann ist nach (1.39) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e > 0$, und somit ist nach (1.41) $a > 0$ genau dann, wenn $a^{-1} > 0$ ist.

(1.45). Ist $F(+, \circ, \leq)$ ein schwach angeordneter rechtslösbarer Fastring, so ist auch $P(F)(\circ)$ rechtslösbar.

Beweis: Sei $a, b \in P(F)^*$. Da $F(+, \circ)$ rechtslösbar ist, gibt es ein Element $x \in F$ mit $a \circ x = b$; und nach (1.41) ist $x \in P(F)^*$.

Aus (1.42) folgt:

(1.46). Ist $F(+, \circ, \leq)$ ein schwach quadratisch angeordneter linkslösbarer Fastring, so ist auch $P(F)(\circ)$ linkslösbar.

Offensichtlich gelten die Umkehrungen der Aussagen (1.45) und (1.46) i. allg. nicht.

(1.47). Sei $F(+, \circ, e, \leq)$ ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring und $E_P := \{x \in F; x \geq e\}$. Dann ist $E_P = e + P$, $E_P + E_P \subset E_P$ und $E_P \circ E_P = E_P$.

Es gilt nun (vgl. KERBY [27]):

(1.48). Ist $F(+, \circ, e, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ schwach angeordneter eindeutig lösbarer rechtsunitärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und erzeugen je zwei Elemente $a, b \in F^*$ eine assoziative Unterloop von $F^*(\circ)$, so ist $F(+, \circ, \leq)$ genau dann angeordnet, wenn $\forall a \in F^*$ gilt: $a \circ E_P \circ a^{-1} \subset E_P$.

Beweis: Offenbar ist $F(+, \circ, e)$ ein unitärer Fastring mit Inversen.

Sei $F(+, \circ, \leq)$ angeordnet und $a \in F^*$, $b \in E_P$. Ist $a > 0$, so ist nach (1.44) auch $a^{-1} > 0$, und es folgt: $a \circ b \circ a^{-1} \geq a \circ e \circ a^{-1} = e$; ist $a < 0$, so ist nach (1.44) auch $a^{-1} < 0$, und es folgt: $b \circ a^{-1} \leq e \circ a^{-1} = a^{-1}$ und $a \circ b \circ a^{-1} \geq a \circ a^{-1} = e$. Also ist $a \circ b \circ a^{-1} \in E_P$. Ist umgekehrt $\forall a \in F^*$ $a \circ E_P \circ a^{-1} \subset E_P$, so gilt für $a > 0$ und $b > e$: $a^{-1} \circ b \circ a > e$, d.h. es ist $b \circ a > a$. Da $\forall x, y \in F^*$ $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ ist, und somit insbesondere $\forall x, y \in F^*$ genau dann $x \circ y > 0$ ist, wenn $x, y > 0$ oder $x, y < 0$ ist, folgt der Rest der Behauptung wie bei KERBY [27], Aussage (2.2).

§2. ARCHIMEDISCH SCHWACH ANGEORDNETE FASTRINGE

Bekanntlich sind nach HÖLDER [21] die (bzgl. der induzierten natürlichen Ordnung angeordneten) additiven Untergruppen der reellen Zahlen bis auf α -Isomorphie die einzigen archimedisch angeordneten Gruppen. HILTON bewies in [19] die Sätze:

(2.1). Sind $H_i(+, \leq)$ ($i = 1, 2$) Unterhalbgruppen von $R(+, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung und ist $f: H_1 \rightarrow H_2$ ein isotoner (bzw. antitoner) Homomorphismus von $H_1(+)$ in $H_2(+)$, so gibt es eine reelle Zahl $r \in R$ mit $r \geq 0$ (bzw. $r \leq 0$) und $f(x) = r \cdot x \quad \forall x \in H_1$.

(2.2). Jeder archimedisch angeordnete Ring mit nichttrivialer Multiplikation ist α -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Es gibt aber, wie sich etwa in den Beispielen (2.28), (4.24), (4.31) und (4.33) zeigen wird, archimedisch angeordnete nicht-distributive Fastringe. Im folgenden soll nun die algebraische Struktur von archimedisch schwach angeordneten Fastringen untersucht werden. Dazu beginnen wir mit der

DEF. 2.3. Ein schwach geordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ heißt archimedisch schwach geordnet, falls $F(+, \leq)$ eine archimedisch geordnete Gruppe ist (d.h. $\{0\}$ ist die einzige nach oben beschränkte Untergruppe von $F(+)$).

Also gilt:

(2.4). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach geordneter Fastring und erfüllt $F(\leq)$ die folgende Bedingung:

S. jede nach oben beschränkte Teilmenge von F besitzt eine obere Grenze,

so ist $F(+, \cdot, \leq)$ archimedisch schwach geordnet.

(2.5). Ein schwach angeordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann archimedisch schwach angeordnet, wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in F^*$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b \leq an$.

(2.6). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring und ist $\forall a \in P^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ genau dann archimedisch schwach angeordnet, wenn es zu jedem streng positiven Element $a \in P^*$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a < en$.

Beweis: Ist $x \in P^*$ und $y \in F$ mit $x \cdot y = e$, so ist nach (1.39) und (1.41) $y > 0$, und somit gibt es ein Element $k \in \mathbb{N}$ mit $y < ek$; daraus folgt: $e = x \cdot y \leq x \cdot (ek) = (x \cdot e)k = xk$. Sei nun o.B.d.A. $a, b \in P^*$. Dann gibt es also natürliche Zahlen $k, m \in \mathbb{N}$ mit $e \leq ak$ und $b < em$. Daraus folgt für $n := km \in \mathbb{N}$: $an = a(km) = (ak)m \geq em > b$. Also ist $F(+, \cdot, \leq)$ nach (2.5) archimedisch schwach angeordnet.

Nun läßt sich eine Verallgemeinerung eines Satzes von VAIDA [54] beweisen:

(2.7). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring, ist $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar, und gibt es zu je zwei Elementen $a, b \in F$ mit $a > e$ und $b > 0$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $b < a^n$, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ archimedisch schwach angeordnet.

Beweis: Sei o.B.d.A. $F \neq \{0\}$ und somit nach (1.39) $e > 0$. Da $F(+, \cdot, e, \leq)$ schwach angeordnet und rechtsunitär ist, ist die Abbildung $f: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow F \\ n \mapsto en \end{cases}$ ein injektiver o-Homomorphismus von $\mathbb{Z}(+, \cdot, \leq)$ in $F(+, \cdot, \leq)$. Sei nun $a \in P(F)^*$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a < (e^2)^m = e(2^m)$. Also ist $F(+, \cdot, \leq)$ nach (2.6) archimedisch schwach angeordnet.

Die algebraischen Voraussetzungen in (2.7) sind jedenfalls dann erfüllt, wenn $F(+, \cdot)$ Inverse besitzt oder $F(+, \cdot, e)$ rechts-

lösbar und rechtsunitär ist. Für linkslösbare rechtsunitäre Fastringe gilt nun:

(2.8). Ist $F(+, \circ, e, \leq)$ ein schwach angeordneter (bzgl. "+") kommutativer rechtsunitärer Fastring, ist $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $x \circ a = e$ in F lösbar, und gibt es zu je zwei Elementen $a, b \in F$ mit $a > e$ und $b > 0$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $b < a^n$, so ist $F(+, \circ, \leq)$ archimedisch schwach angeordnet.

Beweis (siehe dazu auch FUCHS [14]): Sei o.B.d.A. $F \neq \{0\}$ und nach (1.40) $Q(+, \cdot, \leq)$ ein Unterkörper von $F(+, \circ, \leq)$ mit $e = 1$.

Ist $x, y \in F$, $q := m \cdot n^{-1} \in Q$ ($n > 0$) mit $x < y$ und $q > 0$, so ist

$(x \circ q)n = x \circ (qn) = x \circ m = xm < ym = y \circ m = y \circ (qn) = (y \circ q)n$, und daraus folgt: $x \circ q < y \circ q$. Insbesondere gilt also $\forall x \in F, \forall q \in Q, \forall n \in \mathbb{N}$

mit $0 \leq x < q$: $0 \leq x^n < q^n$. Sei nun o.B.d.A. $a, b \in P(F)^*$. Da die Folge $((1+n^{-1})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $Q(\leq)$ beschränkt und $Q(+, \cdot, \leq)$ ein Unterkörper von $F(+, \circ, \leq)$ ist, muß es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ geben mit $(1+a)^k \geq (1+n^{-1})^n \forall n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt dann insbesondere:

$1+a \geq 1+k^{-1}$, und somit ist $a \geq k^{-1}$. Also gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $ak \geq 1$.

Weiterhin gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $2^m > b$. Damit gilt für $n := k \cdot 2^m \in \mathbb{N}$:

$an = a(k \cdot 2^m) = (ak)2^m \geq 2^m > b$. Also ist $F(+, \circ, \leq)$ archimedisch schwach angeordnet.

Wie wir in (2.26) zeigen werden, gelten auch die Umkehrungen der Aussagen (2.7) und (2.8).

DEF. 2.9. Sei $F(+, \circ)$ ein Fastring. Ein Element $k \in F$ heißt konstant, falls $0 \circ k = k$ ist; K bezeichne die Menge aller konstanten Elemente von $F(+, \circ)$ (siehe dazu auch PILZ [37]).

Aus der Definition (2.9) folgt sofort:

(2.10). Ist $F(+, \circ)$ ein Fastring, so ist K eine Untergruppe von $F(+)$;

ist $F(+, \circ)$ nullsymmetrisch, so ist $K = \{0\}$;

ist $K = \{0\}$ und gilt $\forall a \in F: 0 \cdot (0 \cdot a) = 0 \cdot a$, so ist $F(+, \cdot)$ null-
symmetrisch.

I. allg. ist aber K kein Unterfastring von $F(+, \cdot)$, wie das folgende Beispiel zeigt:

BSP. 2.11. Sei $F(+, \leq)$ die lexikographisch angeordnete direkte Summe der angeordneten Gruppen $Q(+, \leq)$ und $Q(+, \leq)$, und $\forall (a, b), (c, d) \in F$ sei $(a, b) \cdot (c, d) := (c, a \cdot c)$. Dann ist $F(+, \cdot, \leq)$ offenbar ein angeordneter linksalternativer potenzassoziativer Fastring mit $K = \{(a, 0); a \in Q\}$. Da aber etwa $(1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 1) \notin K$ ist, ist K kein Unterfastring von $F(+, \cdot)$.

Es gilt aber:

(2.12). Ist $F(+, \cdot)$ ein biassoziativer Fastring, so ist K ein Unterfastring von $F(+, \cdot)$.

(2.13). $F(+, \cdot)$ ist genau dann ein Z-Ring (d.h. $\forall a, b \in F$ ist $a \cdot b = b$, vgl. [6]), wenn $F(+, \cdot)$ biassoziativ und $K = F$ ist.

Nach PILZ [37] gilt für schwach angeordnete Fastringe:

(2.14). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein schwach angeordneter biassoziativer rechtsunitärer Fastring, so ist $K = \{0\}$; somit ist also $F(+, \cdot)$ nullsymmetrisch.

Für archimedisch schwach angeordnete Fastringe gilt nun weiterhin:

(2.15). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ archimedisch schwach angeordneter Fastring, so gilt:

- (i) $K = \{0\}$ oder $K = F$;
- (ii) $F(+, \cdot)$ ist genau dann nullsymmetrisch, wenn $0 \in 0 \cdot F^*$ ist;
- (iii) $P(\cdot)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn $\forall a \in P^*$
 $a \cdot F \neq \{0\}$ ist.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit der

induzierten natürlichen Anordnung. Da $\forall a \in P$ die zugehörigen Linkstranslationen $a_1: \begin{cases} F \longrightarrow F \\ x \longrightarrow a \cdot x \end{cases}$ von $F(+, \cdot)$ o-Endomorphismen von $F(+, \leq)$ sind, gibt es nach (2.1) zu jedem $a \in P$ ein $r_a \in \mathbb{R}$ mit $r_a > 0$ und $a \cdot x = a_1(x) = r_a \cdot x \ \forall x \in F$; insbesondere ist also $0 \cdot x = r_0 \cdot x \ \forall x \in F$ mit $r_0 \in P(\mathbb{R})$. Ist $r_0 = 1$, so ist $0 \cdot x = 1 \cdot x = x \ \forall x \in F$, d.h. es ist $K = F$; ist aber $r_0 \neq 1$, so gilt $\forall x \in F^*$: $0 \cdot x = r_0 \cdot x \neq x$, d.h. es ist $K = \{0\}$.

Es gibt genau dann ein Element $x \in F^*$ mit $0 \cdot x = r_0 \cdot x = 0$, wenn $r_0 = 0$ und somit $F(+, \cdot)$ nullsymmetrisch ist.

Es gibt genau dann zu jedem $a \in P^*$ ein Element $x \in F$ mit $a \cdot x \neq 0$, wenn $\forall a \in P^* \ r_a \neq 0$ und somit $\forall a, b \in P^* \ a \cdot b = r_a \cdot b > 0$ ist, d.h. $P(\cdot)$ ist nullteilerfrei.

Insbesondere gilt also:

(2.16). Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Fastring ist nullsymmetrisch und sein Positivitätsbereich ist nullteilerfrei.

(2.17). Der Positivitätsbereich eines archimedisch schwach angeordneten rechtslösbaren Fastrings ist nullteilerfrei.

Es soll nun gezeigt werden, daß ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring bereits sehr eng mit einem Unterring der reellen Zahlen $\mathbb{R}(+, \cdot, \leq)$ zusammenhängt (obgleich er selbst nicht notwendig ein reeller Unterring ist). Dazu wird zunächst der folgende Hilfssatz bewiesen:

LEMMA 2.18. Sind $F_i(+, \cdot, e_i, \leq)$ ($i = 1, 2$) archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Fastringe, $F_i(+, \leq)$ Untergruppen von $\mathbb{R}(+, \leq)$, $P(F_i)(\cdot)$ Unterhalbgruppen von $\mathbb{R}(\cdot)$ und ist die Abbildung $f: F_1(+, \cdot, \leq) \longrightarrow F_2(+, \cdot, \leq)$ ein o-Isomorphismus, so ist $F_1(+, \cdot, e_1, \leq) = F_2(+, \cdot, e_2, \leq)$ und $f = \text{id}_{F_1}$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $F_1 \neq \{0\}$ und damit auch $F_2 \neq \{0\}$. Dann

ist nach (1.39) $e_i \in P(F_i)^*$ ($i = 1, 2$), und da $P(F_i)(\circ)$ Unterhalbgruppen von $R(\cdot)$ sind, folgt: $e_1 = e_2 = 1$. Da die Abbildung $f: F_1(+, \leq) \rightarrow F_2(+, \leq)$ ein o-Isomorphismus ist und $F_i(+, \leq)$ Untergruppen von $R(+, \leq)$ sind, gibt es nach (2.1) ein Element $r \in R$ mit $f(x) = r \cdot x \ \forall x \in F_1$; und da $f: F_1(\circ) \rightarrow F_2(\circ)$ ein Isomorphismus, $f(e_1) > 0$ und $P(F_2)(\circ)$ eine Unterhalbgruppe von $R(\cdot)$ ist, gilt also: $f(1) = f(e_1) = e_2 = 1$. Daraus folgt: $r = 1$, d.h. es ist $f = \text{id}_{F_1}$ und $F_1(+, \circ, e_1, \leq) = F_2(+, \circ, e_2, \leq)$.

Es gilt nun:

SATZ 2.19. Ist $F(+, \circ, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring (mit rechtsneutralem Element e) und $F \neq \{0\}$, so ist $F(+, \circ, e, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten archimedisch schwach angeordneten unitären Fastring $F_R(+, \times, e_R, \leq)$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (i) $F_R(+, \cdot, \leq)$ ist ein Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung,
- (ii) $\forall a \in P(F_R), \forall b \in F_R$ ist $a \times b = a \cdot b$, und $e_R = 1$ ist das Einselement von $F_R(+, \times)$,
- (iii) $\mathbb{Z}(+, \cdot)$ ist ein Unterring von $F_R(+, \times)$, und $\forall a \in F_R, \forall n \in \mathbb{Z}$ ist $a \times n = a \cdot n$.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung. Da $F \neq \{0\}$ ist, gilt also nach (1.39): $e > 0$. Sei $F_R := F \cdot e^{-1} \subset R$ und $\forall a, b \in F_R$ $a \times b := ((e \cdot a) \circ (e \cdot b)) \cdot e^{-1}$. Dann ist $F_R(+, \times, e_R, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring mit rechtsneutralem Element $e_R := e \cdot e^{-1} = 1$, und nach Konstruktion von $F_R(+, \times, e_R, \leq)$ gilt: $F_R(+, \times, e_R, \leq)$ ist o-isomorph zu $F(+, \circ, e, \leq)$, und $F_R(+, \leq)$ ist eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Da $\forall a \in P(F_R)$ die Linkstranslationen a_1 von $F_R(+, \times)$ o-Endomorphis-

men von $F_R(+, \leq)$ sind, gibt es nach (2.1) zu jedem Element $a \in P(F_R)$ eine reelle Zahl $r_a \in \mathbb{R}$ mit $r_a \geq 0$ und $a \cdot x = a_1(x) = r_a \cdot x$ $\forall x \in F_R$. Da $e_R = 1$ ein rechtsneutrales Element von $F_R(+, \cdot)$ ist, ist $\forall a \in P(F_R)$ $a = a \cdot e_R = a \cdot 1 = r_a \cdot 1 = r_a$, und somit gilt $\forall a \in P(F_R), \forall b \in F_R: a \cdot b = r_a \cdot b = a \cdot b$. Da $e_R = 1 > 0$ ist, gilt $\forall b \in F_R: e_R \cdot b = 1 \cdot b = 1 \cdot b = b$, d.h. $e_R = 1$ ist ein (und damit das einzige) Einselement von $F_R(+, \cdot)$. Also ist $F_R(+, \cdot, e_R)$ unitär.

Sei $a, b \in F_R$ und o.B.d.A. sei $a \geq 0$. Dann ist $a \cdot b = a \cdot b \in F_R$, d.h. $F_R(+, \cdot)$ ist ein Unterring von $R(+, \cdot)$.

Da $1 = e_R \in F_R$ und $F_R(+)$ eine Untergruppe von $R(+)$ ist, ist $\mathbb{Z}(+)$ eine Untergruppe von $F_R(+)$, und $\forall a \in F_R, \forall n \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \cdot n = a \cdot (1n) = (a \cdot 1)n = an = a \cdot n$; insbesondere ist also $\mathbb{Z}(+, \cdot)$ ein Unterring von $F_R(+, \cdot)$.

Aus (2.18) folgt schließlich, daß $F_R(+, \cdot, e_R, \leq)$ eindeutig bestimmt ist.

I. allg. ist $F_R(+, \cdot)$ kein Körper, es gilt aber:

(2.20). $F_R(+, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F (bzw. $x \cdot a = e$ in $P(F)$) lösbar ist.

Beweis: Die Gleichung $a \cdot x = e$ ist genau dann $\forall a \in P(F)^*$ in F lösbar, wenn die Gleichung $a \cdot x = 1$ $\forall a \in P(F_R)^*$ in F_R lösbar ist, und nach (2.19) ist $P(F_R)(\cdot) = P(F_R)(\cdot)$. Offenbar ist aber $F_R(+, \cdot)$ genau dann ein Körper, wenn $\forall a \in P(F_R)^*$ die Gleichung $a \cdot x = 1$ in F_R lösbar ist.

Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ und $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring über der Gruppe $F(+, \leq)$, so ist $F_R = F$ und somit also $P(F)(\cdot)$ rechts- (links-)lösbar.

(2.21). Ist $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar, so

ist $Q(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $F_R(+, \cdot, 1)$, und es gilt $\forall a \in F_R$, $\forall q \in Q$: $a \cdot q = a \cdot q$.

Beweis: Da $F_R(+, \cdot)$ nach (2.20) ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$ ist, ist $Q \subset F_R$, und somit ist $F_R(+)$ ein Vektorraum über dem Körper der rationalen Zahlen $Q(+, \cdot)$. Da bekanntlich $f \in \text{End}(F_R(+))$ genau dann ist, wenn f eine lineare Abbildung von $F_R(+)$ über Q in sich ist, und $\forall a \in F_R$ die Linkstranslationen a_1 von $F_R(+, \cdot)$ Endomorphismen von $F_R(+)$ sind, gilt $\forall a \in F_R$, $\forall q \in Q$:

$$a \cdot q = a_1(q) = a_1(1 \cdot q) = a_1(1) \cdot q = (a \cdot 1) \cdot q = a \cdot q;$$

insbesondere ist also $Q(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $F_R(+, \cdot)$.

In §3 werden wir zeigen, daß sogar $F_R(+, \cdot) = F_R(+, \cdot)$ und damit $F(+, \cdot)$ ein Körper ist, wenn $F(+, \cdot)$ linksregulär und $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar ist (vgl. (3.17)).

Ist $Q(+, \cdot, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring über der Gruppe $Q(+, \leq)$, so ist $Q_R = Q$. Also gilt nach (2.20) und (2.21):

(2.22). Bis auf o-Isomorphie ist $Q(+, \cdot, 1, \leq)$ der einzige archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Fastring über der Gruppe $Q(+, \leq)$.

Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit $[F:Q] \geq 2$, so gibt es aber archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Fastringe über der Gruppe $F(+, \leq)$, die nicht o-isomorph sind (siehe dazu Bsp. (3.29)).

Da die Gruppe der o-Automorphismen $A_0 := \text{Aut}_0(F(+, \cdot, \leq))$ eines schwach angeordneten Fastrings $F(+, \cdot, \leq)$ bzgl. des Positivitätsbereichs $P(A_0) := \{f \in A_0; f(x) \geq x \ \forall x \in P(F)\}$ geordnet und die multiplikative Gruppe der streng positiven reellen Zahlen $P(R)^*(\cdot, \leq)$ (bzgl. der natürlichen Ordnung) archimedisch angeordnet ist, gilt nach (2.1) ebenso wie für archimedisch angeordnete Gruppen:

(2.23). Die Gruppe der σ -Automorphismen $A_0(\cdot, \leq)$ eines archimedisch schwach angeordneten Fastringes ist σ -isomorph zu einer Untergruppe von $P(R)^*(\cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung; insbesondere ist also $A_0(\cdot, \leq)$ archimedisch angeordnet.

Für archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Fastringe gilt nun nach (2.18) und (2.19) sogar:

(2.24). Die identische Abbildung ist der einzige σ -Automorphismus eines archimedisch schwach angeordneten rechtsunitären Fastringes.

Weiterhin erhält man unmittelbar aus (2.19):

(2.25). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter Fastring und $e \in F$ ein rechtsneutrales Element von $F(+, \cdot)$, so ist $F(+, \cdot, e)$ ein unitärer Fastring mit dem Einselement e .

(2.26). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring mit dem Positivitätsbereich $P := P(F)$, so gilt:

- (i) $F(+, \cdot, 0, e)$ ist ein assoziativer kommutativer nullteilerfreier Halbring mit dem (multiplikativen) Einselement e ,
- (ii) $P(\cdot, e, \leq)$ ist ein archimedisch angeordnetes Monoid mit dem Positivitätsbereich E_P (vgl. (1.47));
- (iii) ist $\forall a \in P^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar und $F \neq \{0\}$, so ist $P^*(\cdot, e, \leq)$ eine archimedisch angeordnete Gruppe.

Nach (2.4) und (2.20) gilt sogar:

(2.27). Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring mit $F \neq \{0\}$, ist $\forall a \in P(F)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar und erfüllt $F(\leq)$ die Bedingung (S) von (2.4), so ist $P(F)(+, \cdot, \leq)$ σ -isomorph zu $P(R)(+, \cdot, \leq)$.

Es gibt aber archimedisch schwach angeordnete linksunitäre Fastringe $F(+, \circ, \leq)$, die nicht unitär sind, für die $P(F)(\circ)$ nicht kommutativ ist und die mehrere o-Automorphismen besitzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

BSP. 2.28. Sei $F(+, \leq) := \mathbb{R}(+, \leq)$ und für je zwei Elemente $a, b \in F$

$$a \circ b := \begin{cases} b, & \text{falls } a > 0 \\ 0, & \text{falls } a = 0 \\ -b, & \text{falls } a < 0 \end{cases} .$$

Dann ist $F(+, \circ, \leq)$ ein archimedisch

angeordneter rechtseindeutiglösbarer assoziativer negativ-treuer linksunitärer Fastring, der nicht unitär ist, und $P(F)(\circ)$ ist nicht kommutativ. Zu jeder streng positiven reellen Zahl $r \in P(\mathbb{R})^*$ sei die Abbildung $f_r: F \rightarrow F$ definiert durch $f_r(x) := r \cdot x \quad \forall x \in F$. Dann gilt offenbar $\forall r, s \in P(\mathbb{R})^*$:

- (i) f_r ist ein o-Automorphismus von $F(+, \circ, \leq)$,
- (ii) $f_r \neq f_s$, falls $r \neq s$ ist.

Also besitzt $F(+, \circ, \leq)$ mehrere o-Automorphismen. Da aber eine Abbildung $f: F \rightarrow F$ genau dann ein o-Automorphismus von $F(+, \circ, \leq)$ ist, wenn f ein o-Automorphismus von $F(+, \leq)$ ist, folgt nach (2.1), daß die Abbildungen f_r ($r \in P(\mathbb{R})^*$) sogar genau die o-Automorphismen von $F(+, \circ, \leq)$ sind.

§3. SPEZIELLE KLASSEN ARCHIMEDISCH SCHWACH ANGEORDNETER FASTRINGE

Bei der Untersuchung archimedisch schwach angeordneter Fast-
ringe stellt sich insbesondere die Frage, ob sie o-isomorph zu
Unterringen der reellen Zahlen sind. Während diese Frage so all-
gemein etwa durch die Beispiele (2.28), (3.28), (3.29), (4.24),
(4.31) und (4.33) verneint wird, läßt sie sich jedoch für große
Klassen archimedisch schwach angeordneter Fastringe positiv be-
antworten, wie in diesem Paragraphen gezeigt werden soll.

Aus (2.19) folgt zunächst:

SATZ 3.1. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre
negativ-treue Fastring $F(+, \circ, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph
zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der
induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Nach (2.19) gilt für den zu $F(+, \circ, \leq)$ gehörigen Fast-
ring $F_R(+, \times, \leq)$: $a \times b = a \cdot b \quad \forall a \in P(F_R), \forall b \in F_R$. Da $F(+, \circ)$ und so-
mit auch $F_R(+, \times)$ negativ-treu ist, gilt auch $\forall a \in -P(F_R), \forall b \in F_R$:
 $a \times b = -(-a) \times b = -(-a) \cdot b = a \cdot b$. Also ist $F_R(+, \times) = F_R(+, \cdot)$.

Die Aussage (3.1) folgt auch aus (1.32) und (4.37).

Im folgenden sollen nun spezielle Klassen unitärer negativ-
treuer Fastringe bestimmt werden.

(3.2). Ist $F(+, \circ, e)$ ein linksunitärer Fastring (mit linksneu-
tralem Element e) und sind $\forall a, b \in F^*$ die folgenden drei Bedingun-
gen erfüllt:

- (i) $(-e) \circ a \neq a$,
 - (ii) die Gleichung $x \circ a = e$ ist in F^* lösbar,
 - (iii) $x \circ (a \cdot b) = b$, falls $x \in F^*$ mit $x \circ a = e$ ist,
so ist $F(+, \cdot)$ (bzgl. "+") kommutativ und rechtseindeutig lösbar.
- Beweis: Sind $a, u, v \in F^*$ mit $u \circ a = v \circ a = e$, so gibt es nach (ii)

ein Element $w \in F^*$ mit $w \cdot u = e$, und es gilt nach (iii):

$$a \cdot u = w \cdot (u \cdot (a \cdot u)) = w \cdot u = e \text{ und } u = v \cdot (a \cdot u) = v \cdot e = v \cdot (a \cdot v) = v.$$

Also ist $\forall a \in F^*$ die Gleichung $x \cdot a = e$ in F^* eindeutig lösbar.

Da $\forall a, u \in F^*$ mit $u \cdot a = e$ auch $a \cdot u = e$ ist, ist also nach (iii) $F(+, \cdot)$ rechtseindeutig lösbar.

Sei nun o.B.d.A. $\text{char}(F) \neq 2$, $a, u \in F^*$ mit $u \cdot a = e$ und $h \in F^*$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x \cdot (e + e) = e$. Dann ist $a \cdot h$ eine Lösung der Gleichung $x + x = a$. Ist umgekehrt $x \in F^*$ mit $a = x^2$, so ist $e = u \cdot a = u \cdot x + u \cdot x$. Also muß $u \cdot x = h$ und somit $x = a \cdot (u \cdot x) = a \cdot h$ sein. Also ist $F(+)$ halbierbar.

Sei die Abbildung $f: F \rightarrow F$ definiert durch $f(x) := (-e) \cdot x \quad \forall x \in F$. Dann ist f offenbar ein involutorischer Automorphismus von $F(+)$, der in F^* keine Fixelemente besitzt.

Also ist $F(+)$ nach einem Satz von NEUMANN [33] kommutativ.

DEF. 3.3. (TIMM [50]) Ein Fastring $F(+, \cdot)$ heißt Moufangsystem, falls $F^*(\cdot)$ eine Moufangloop ist (d.h. $F^*(\cdot)$ ist eine Loop und $\forall a, b, c \in F^*$ gilt die Moufang-Gleichung $(a \cdot b) \cdot (c \cdot a) = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot a$ (siehe dazu auch BRUCK [8])).

Die geometrische Bedeutung und die algebraische Struktur von Moufangsystemen wurden von KALLAHER [22] und TIMM [50] untersucht.

Da nach einem Satz von BRUCK ([8], Seite 117) je zwei Elemente einer Moufangloop eine assoziative Unterloop erzeugen, gilt also nach (3.2):

(3.4). Jedes Moufangsystem besitzt kommutative Addition.

DEF. 3.5. Ein nullsymmetrischer Fastring $F(+, \cdot)$ mit Inversen heißt Kürzregelsystem, falls $\forall a, b \in F^*$ die Kürzregeln $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = a$ und $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = b$ gelten.

Die Existenz echter Kürzregelsysteme wurde von TIMM in [52]

bewiesen.

Aus (3.2) folgt sofort:

(3.6). Jedes Kürzregelsystem besitzt kommutative Addition.

DEF. 3.7. Ein Fastring $F(+, \circ)$ heißt planar (oder projektiv), falls $\forall a, b, c \in F$ mit $a \neq b$ die Gleichung $-a \circ x + b \circ x = c$ in F eindeutig lösbar ist.

DEF. 3.8. Ein nullsymmetrischer Fastring $F(+, \circ)$ heißt Fastkörper, falls $F^*(\circ)$ eine Gruppe ist.

Bekanntlich konstruierten DICKSON [9] und ZASSENHAUS [55] aus endlichen Körpern durch Abbildung der Multiplikation bis auf sieben Ausnahmen alle endlichen Fastkörper, und KARZEL [24] wendete zur Konstruktion unendlicher Fastkörper dieses Verfahren auch auf Schiefkörper an. Die Existenz sowohl nichtprojektiver als auch echter projektiver angeordneter Fastkörper wurde von KERBY [27] nachgewiesen. KERBY zeigte in [27] auch, daß es schwach quadratisch angeordnete nichtprojektive Fastkörper gibt, die nicht angeordnet sind.

Aus (3.6) und (3.8) folgt speziell (vgl. etwa KARZEL [25]):

(3.9). Jeder Fastkörper besitzt kommutative Addition.

Mit Hilfe von (3.6) läßt sich nun auch folgende Aussage beweisen:

(3.10). Jedes Kürzregelsystem $F(+, \circ, e)$ ist negativ-treu.

Beweis: Da $F(+)$ nach (3.6) kommutativ ist, gilt also nach

(1.14) $\forall x \in F: (-e) \circ x = -x$. Daraus folgt $\forall x \in F^*$:

$(-x) \circ (-x^{-1}) = -((-e) \circ x) \circ x^{-1} = -(-e) = e$, d.h. $\forall x \in F^*$ ist

$(-x)^{-1} = -x^{-1}$. Ist nun $a, b \in F^*$, so ist $(a \circ (-b)) \circ (-b)^{-1} = a = -(-a) = -((-a) \circ b) \circ b^{-1} = ((-a) \circ b) \circ (-b^{-1}) = ((-a) \circ b) \circ (-b)^{-1}$,

d.h. es ist $(-a) \circ b = a \circ (-b)$. Also ist $F(+, \circ)$ negativ-treu.

Daraus folgt sofort (vgl. etwa KARZEL [25]):

(3.11). Jeder Fastkörper ist negativ-treu.

Ein Moufangsystem $F(+, \circ)$ ist i. allg. nicht negativ-treu (da $F(+, \circ)$ nicht nullsymmetrisch sein muß), wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

BSP. 3.12. Sei $K(+, \cdot)$ ein beliebiger Körper und $f \in \text{End}(K(+))$. Sei $F(+, \circ) := K(+)$, $F^*(\circ) := K^*(\cdot)$ und $\forall x \in F \quad 0 \circ x := f(x)$. Dann ist $F(+, \circ)$ offenbar ein Moufangsystem, und es gilt: $F(+, \circ)$ ist genau dann negativ-treu, wenn $f = 0$ (= Nullabbildung) ist.

Es gilt aber nach (3.10):

(3.13). Jedes nullsymmetrische Moufangsystem ist negativ-treu.

Damit erhält man also aus (3.1), (3.10), (3.11) und (3.13) die folgenden Korollare:

KOR. 3.14. Jedes archimedisch schwach angeordnete Kürzregelsystem $F(+, \cdot, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

KOR. 3.15. Jedes archimedisch schwach angeordnete nullsymmetrische Moufangsystem ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Und noch spezieller gilt:

KOR. 3.16. (KERBY [27]) Jeder archimedisch schwach angeordnete Fastkörper ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

In diesem Abschnitt werden nun Fastringe untersucht, die gewisse Lösbarkeitsbedingungen erfüllen. Zunächst beweisen wir den

SATZ 3.17. Ist $F(+, \cdot, e, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer linksregulärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und ist $\forall a \in P^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in F lösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ α -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Sei $a, b \in F_R$ (siehe dazu (2.19)) mit $a < 0$ und $b > 0$. Angenommen es ist $a \cdot b > 0$. Da $F_R(+, \cdot)$ nach (2.20) ein Körper ist, ist somit $x := (a \cdot b) \cdot b^{-1} \in P(F_R)^*$. Daraus folgt aber nach (2.19): $x \cdot b = x \cdot b = a \cdot b$ mit $a < 0 < x$, im Widerspruch zur Linksregularität von $F(+, \cdot)$. Also gilt $\forall a, b \in F_R$ mit $a \leq 0$ und $b \geq 0$: $a \cdot b \leq 0$, d.h. $\forall a \in -P(F_R)$ sind die Linkstranslationen a_1 von $F_R(+, \cdot)$ antiton. Somit gibt es nach (2.1) zu jedem Element $a \in -P(F_R)$ eine reelle Zahl $r_a \in \mathbb{R}$, $r_a \leq 0$ mit $a \cdot x = a_1(x) = r_a \cdot x \quad \forall x \in F_R$, und da $1 \in F_R$ das Einselement von $F_R(+, \cdot)$ ist, folgt $\forall a \in F_R$ mit $a \leq 0$: $a = a \cdot 1 = r_a \cdot 1 = r_a$. Also gilt auch $\forall a, b \in F_R$ mit $a \leq 0$: $a \cdot b = a \cdot b$, d.h. es ist $F_R(+, \cdot) = F_R(+, \cdot)$, und somit ist $F(+, \cdot, \leq)$ α -isomorph zu einem Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$.

Insbesondere gilt also:

KOR. 3.18. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre linksreguläre rechtslösbare Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist α -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

DEF. 3.19. Ein Fastring $F(+, \cdot)$ heißt Divisionsfastring, falls $F^*(\cdot)$ eine Quasigruppe ist.

(3.20). Ein Fastring ist genau dann eindeutig lösbar, wenn er ein nullsymmetrischer Divisionsfastring ist.

In [51] löste TIMM das "Zassenhausproblem", nämlich die Klasse der nullsymmetrischen unitären und (bzgl. "+") kommutativen Divisionsfastringe aus der Klasse der kommutativen Körper durch

Abänderung der Multiplikation zu konstruieren.

Nach (2.16) folgt unmittelbar aus (3.18):

KOR. 3.21. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre Divisionsfastring ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Da ein nullsymmetrischer planarer Fastring linksregulär und rechtseindeutig lösbar ist, gilt nach (2.16) und (3.18) speziell:

KOR. 3.22. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre planare Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

DEF. 3.23. Ein planarer nullsymmetrischer Fastring $F(+, \cdot)$ heißt Quasikörper, falls $F^*(\cdot)$ eine Loop ist.

Bekanntlich gibt es echte Quasikörper (z.B. ist ein Hallsystem $K^2(+, \cdot)$ ein Quasikörper (siehe dazu HALL [16]), der genau dann nicht negativ-treu ist, wenn die Charakteristik des Körpers $K(+, \cdot)$ ungleich 2 ist). Eine Zusammenfassung sämtlicher bekannter Konstruktionsmethoden von Quasikörpern lieferte TIMM in [51].

Als weiteres Korollar erhält man nun aus (3.22) (bzw. aus (3.21)) eine Verallgemeinerung eines Satzes von PICKERT ([34], Seite 242):

KOR. 3.24. Jeder archimedisch schwach angeordnete Quasikörper ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Aus (3.17) folgt weiterhin:

KOR. 3.25. Jeder archimedisch schwach angeordnete linksreguläre

re Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ mit Inversen und $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Def. 3.26. Ein nullsymmetrischer Fastring $F(+, \cdot)$ mit Inversen heißt Rechts- $\mathcal{R}$ -System, falls $\forall a, b \in F^*$ die Rechtskürzregel $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = a$ gilt.

Wie bereits erwähnt, wurden Rechts- $\mathcal{R}$ -Systeme von SPERNER in [46] verwendet, um Quasimoduln zu konstruieren. Die algebraische Struktur von Rechts- $\mathcal{R}$ -Systemen wurde von TIMM in [47] näher untersucht. In [47] zeigte TIMM auch die Existenz echter Rechts- $\mathcal{R}$ -Systeme und echter Quasikörper mit Rechtskürzregel.

Da ein Rechts- $\mathcal{R}$ -System linkseindeutig lösbar und rechtsregulär ist, folgt aus (3.25) sofort:

KOR. 3.27. Jedes archimedisch schwach angeordnete Rechts- $\mathcal{R}$ -System $F(+, \cdot, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Aber nicht jeder archimedisch schwach angeordnete linksreguläre (bzw. rechtseindeutig lösbare) unitäre Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist ein Ring (bzw. Körper), wie die folgenden zwei Beispiele zeigen:

BSP. 3.28. Sei $F(+, \cdot) := \mathbb{Q}[t](+, \leq)$ mit $t \in \mathbb{R}^*$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Für jedes Element $a \in F(F)^*$ sei die Abbildung $a_1 \in \text{End}(F(+))$ definiert durch $a_1(t^n) := (a-1) \cdot t^{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$, und $\forall a, b \in F$ sei $a \cdot b := \begin{cases} a \cdot b, & \text{falls } a \geq 0 \\ a_1(b) & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $F(+, \cdot, 1, \leq)$ offenbar ein archimedisch schwach angeordneter unitärer Fastring, und für $a \in F(F)^*$, $x := \sum_{i=0}^n x_i \cdot t^i \in F$ gilt: $a \cdot x = (a-1) \cdot x + \sum_{i=0}^n x_i$; insbesondere ist also $\forall a \in F, \forall q \in \mathbb{Q} \quad a \cdot q = a \cdot q$.

Ist nun $a, b, x \in F$ mit $a < 0, b \geq 0$ und $x := \sum_{i=0}^n x_i \cdot t^i \neq 0$, so ist

$a-b-1 < 0$, und aus $0 = a \cdot x - b \cdot x = (a-b-1) \cdot x + \sum_{i=0}^n x_i$ folgt dann:
 $x \in Q$, d.h. es ist $0 = (a-b-1) \cdot x + x$ und somit $a = b$. Also ist
 $F(+, \cdot)$ linksregulär.

Ist nun o.B.d.A. $t > 0$, so ist $-t \cdot t = -t \cdot t \neq -t \cdot t - t + 1 = (-t) \cdot t$,
d.h. $F(+, \cdot)$ ist nicht distributiv.

BSP. 3.29. Sei $F(+, \cdot, \leq)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit
 $[F:Q] \geq 2$. Für jedes Element $a \in F$ sei f_a eine lineare Abbildung
des Vektorraums $F(+)$ über Q in sich mit $f_a(1) = 1 \ \forall a \in F^*$ und
 $f_a = \text{id}_F \ \forall a \in P(F)^*$. Dann ist $F(+, \cdot, 1, \leq)$ mit $a \cdot b := a \cdot f_a(b) \ \forall a, b \in F$
ein archimedisch schwach angeordneter unitärer Fastring.
Ist f_a bijektiv $\forall a \in -P(F)^*$, so ist $F(+, \cdot)$ sogar rechtseindeutig-
lösbar.

Ist aber $f_a \neq \text{id}_F$ für mindestens ein Element $a \in F$ mit $a < 0$, so
ist $F(+, \cdot)$ nicht distributiv.

Nach (2.28) gibt es auch archimedisch schwach angeordnete as-
soziative rechtseindeutiglösbare nichtdistributive Fastringe. Es
gilt aber:

SATZ 3.30. Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter
rechtsalternativer linksregulärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und ist
 $P(F)(\cdot)$ rechtslösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem ein-
deutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten
natürlichen Anordnung.

Beweis: Sei $a \in P(F)^*$. Dann gibt es ein Element $e_a \in P(F)^*$ mit
 $a \cdot e_a = a$. Da $P(F)(\cdot)$ nach (2.17) nullteilerfrei ist, folgt aus
 $a \cdot e_a = (a \cdot e_a) \cdot e_a = a \cdot (e_a \cdot e_a)$: $e_a = e_a \cdot e_a$. Somit gilt $\forall x \in F$:
 $x \cdot e_a = x \cdot (e_a \cdot e_a) = (x \cdot e_a) \cdot e_a$. Da $F(+, \cdot)$ linksregulär ist, folgt
 $\forall x \in F$: $x \cdot e_a = x$, d.h. $F(+, \cdot, e_a)$ ist rechtsunitär. Aus (3.17)
folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Da nach (1.11) ein biassoziativer linksregulärer Fastring

nullsymmetrisch ist, folgt sofort:

KOR. 3.31. Jeder archimedisch schwach angeordnete biassoziative planare Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Für linkslösbare Fastringe gilt:

SATZ 3.32. Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter biassoziativer linkseindeutiglösbarer Fastring mit $F \neq \{0\}$, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Nach (1.11) ist $F(+, \cdot)$ nullsymmetrisch. Sei $a \in F^*$. Dann gibt es ein Element $e_a \in F^*$ mit $e_a \cdot a = a$, und aus

$e_a \cdot a = e_a \cdot (e_a \cdot a) = (e_a \cdot e_a) \cdot a$ folgt: $e_a = e_a \cdot e_a$. Somit gilt

$\forall x \in F: x \cdot e_a = x \cdot (e_a \cdot e_a) = (x \cdot e_a) \cdot e_a$. Daraus folgt $\forall x \in F:$

$x = x \cdot e_a$, d.h. e_a ist ein rechtsneutrales Element von $F(+, \cdot)$.

Also ist $F(+, \cdot, e)$ nach (2.25) sogar unitär mit dem Einselement

$e := e_a$. Ist $b \in F^*$, so gibt es ein Element $x \in F^*$ mit $x \cdot b = e$. Aus

$(b \cdot x) \cdot b = b \cdot (x \cdot b) = b \cdot e = e \cdot b$ folgt: $b \cdot x = e$, d.h. $F(+, \cdot)$ be-

sitzt Inverse. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus (3.25).

SATZ 3.33. Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ archimedisch schwach angeordneter alternativer linksregulärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und ist $P(\cdot)$ linkslösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Sei $a \in P$ die Lösung der Gleichung $x \cdot b = 0$ mit $b \in P^*$.

Dann ist $a \cdot x = 0 \quad \forall x \in F$, und somit gilt $\forall x \in F:$

$0 \cdot x = (a \cdot a) \cdot x = a \cdot (a \cdot x) = a \cdot 0 = 0$. Also ist $F(+, \cdot)$ nullsymmetrisch.

Sei nun $a \in P^*$. Dann gibt es genau ein Element $e_a \in P^*$ mit $e_a \cdot a = a$,

und aus $e_a \circ a = e_a \circ (e_a \circ a) = (e_a \circ e_a) \circ a$ folgt: $e_a = e_a \circ e_a$. Somit gilt $\forall x \in F: x \circ e_a = x \circ (e_a \circ e_a) = (x \circ e_a) \circ e_a$. Daraus folgt $\forall x \in F: x = x \circ e_a$, d.h. e_a ist ein rechtsneutrales Element von $F(+, \circ)$. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus (3.17).

Schließlich werden nun noch assoziative Fastringe untersucht. Bevor wir hierzu die Aussage (3.34) beweisen, werden zunächst für nicht notwendig assoziative Fastringe die folgenden (vierstelligen) Assoziatoroperationen erklärt:

Für je vier Elemente $a, b, c, d \in F$ eines Fastringes $F(+, \circ)$ sei

$$[a, b, c, d]_1 := ((a \circ b) \circ c) \circ d - (a \circ (b \circ c)) \circ d,$$

$$[a, b, c, d]_2 := ((a \circ b) \circ c) \circ d - (a \circ b) \circ (c \circ d),$$

$$[a, b, c, d]_3 := ((a \circ b) \circ c) \circ d - a \circ ((b \circ c) \circ d),$$

$$[a, b, c, d]_4 := ((a \circ b) \circ c) \circ d - a \circ (b \circ (c \circ d)),$$

$$[a, b, c, d]_5 := (a \circ (b \circ c)) \circ d - (a \circ b) \circ (c \circ d),$$

$$[a, b, c, d]_6 := (a \circ (b \circ c)) \circ d - a \circ ((b \circ c) \circ d),$$

$$[a, b, c, d]_7 := (a \circ b) \circ (c \circ d) - a \circ ((b \circ c) \circ d),$$

$$[a, b, c, d]_8 := (a \circ b) \circ (c \circ d) - a \circ (b \circ (c \circ d)).$$

(3.34). Ist $F(+, \circ, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und den Eigenschaften:

(i) $\forall a \in F^*$ ist $(-e) \circ a \neq a$,

(ii) für je vier Elemente $a, b, c, d \in F^*$, von denen mindestens zwei gleich sind, gilt eine der folgenden Bedingungen:

(1) ist $a = b$, so ist $[a, b, c, d]_i = 0$ für ein $i \in \{3, 5, 6, 7\}$,

(2) ist $a = c$, so ist $[a, b, c, d]_i = 0$ für ein $i \in \{2, 3, 5, 6\}$,

(3) ist $a = d$ oder $b = d$, so ist $[a, b, c, d]_i = 0$ für ein $i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$,

(4) ist $b = c$, so ist $[a, b, c, d]_i = 0$ für ein $i \in \{2, 5, 7\}$,

so ist $F(+, \circ, e, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unter-ring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Nach (2.25) ist $F(+, \circ, e)$ unitär mit dem Einselement

$e \in P(F)^*$, und nach (ii) gilt dann offenbar $\forall a \in F^*$:

$(-e) \circ ((-e) \circ a) = a$. Da $F(+)$ kommutativ ist, folgt somit nach (1.14) aus (i) $\forall a \in F$: $(-e) \circ a = -a$. Also gilt offensichtlich nach (ii) $\forall a, b \in F^*$: $(-a) \circ b = -a \circ b$, d.h. $F(+, \circ)$ ist negativ-treu. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus (3.1).

Also gilt insbesondere:

AOR. 3.35. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsunitäre linksreguläre Fastring $F(+, \circ, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$, in dem $\forall a, b, c \in F^*$ die Assoziativ-Gleichung $(a \circ b) \circ (c \circ a) = (a \circ (b \circ c)) \circ a$ gilt, ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Nun erhält man den folgenden Satz:

SATZ 3.36. Ist $F(+, \circ, e, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsunitärer assoziativer Fastring mit $F \neq \{0\}$, so ist $F(+, \circ, e, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: Nach (2.19) sei o.B.d.A. $F(+, \cdot, 1, \leq)$ ein unitärer Unterring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung, $e = 1$ und $\forall a \in P(F)$, $\forall b \in F$ $a \circ b = a \cdot b$. Sei die Abbildung $f: F \rightarrow F$ definiert durch $f(x) := -(-1) \circ x \quad \forall x \in F$. Dann ist f offenbar ein involutorischer Automorphismus von $F(+)$ mit $f(1) = 1$. Da $F(+, \circ)$ assoziativ ist, ist $\forall a \in -P(F)$, $\forall b \in F$ $a \circ b = ((-a) \circ (-1)) \circ b = (-a) \circ ((-1) \circ b) = (-a) \circ (-f(b)) = a \circ f(b)$. Somit gilt für je drei Elemente $a, b, c \in F$ mit $a \leq 0$:

- (1) $a \circ f(b) \circ f(c) = a \circ f(b \circ c)$, falls $b \geq 0$ und $f(b) \geq 0$ ist,
- (2) $a \circ f(b) \circ c = a \circ f(b \circ f(c))$, falls $b \leq 0$ und $f(b) \leq 0$ ist,
- (3) $a \circ f(b) \circ c = a \circ f(b \circ c)$, falls $b \geq 0$ und $f(b) \leq 0$ ist,
- (4) $a \circ f(b) \circ f(c) = a \circ f(b \circ f(c))$, falls $b \leq 0$ und $f(b) \geq 0$ ist.

Da f involutorisch ist, folgt hieraus $\forall b, c \in F$:

(5) $f(b \cdot c) = f(b) \cdot f(c)$, falls $b \cdot f(b) \geq 0$ ist,

(6) $f(b \cdot c) = f(b) \cdot c$, falls $b \cdot f(b) \leq 0$ ist.

Angenommen es gibt ein Element $a \in F^*$ mit $f(a) = -a$. Dann ist $a \cdot f(a) < 0$, und somit gilt nach (6) $\forall x \in F$:

$f(x \cdot a) = f(a \cdot x) = f(a) \cdot x = -a \cdot x$. Ist nun $x \cdot f(x) \geq 0$, so ist nach

(5) $f(x \cdot a) = f(x) \cdot f(a) = f(x) \cdot (-a) = -a \cdot f(x)$, und damit ist

$f(x) = x$; ist $x \cdot f(x) \leq 0$, so ist nach (6) $f(x \cdot a) = f(x) \cdot a$, und

damit ist $f(x) = -x$. Also gilt $\forall x \in F$: $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$.

Da aber $f \in \text{End}(F(+))$ ist, folgt daraus: $f = \text{id}_F$ oder $f = -\text{id}_F$,

im Widerspruch zu $f(1) = 1$ und $f(a) = -a$ mit $a \neq 0$.

Also gilt $\forall x \in F^*$: $f(x) \neq -x$, d.h. $\forall x \in F^*$ ist $(-1) \cdot x \neq x$. Somit

folgt aus (3.34) unmittelbar die Behauptung.

Als nächstes beweisen wir:

(3.37). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsalternativer Fastring mit dem Positivitätsbereich $P := P(F)$, so gilt $\forall a \in P, \forall b \in P^*, \forall c \in F$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$. Da $\forall a \in P$ die Linkstranslationen a_1 von $F(+, \cdot)$ o-Endomorphismen von $F(+, \leq)$ sind, gibt es nach (2.1) zu jedem Element $a \in P$ eine reelle Zahl $r_a \in P(R)$ mit $a \cdot x = a_1(x) = r_a \cdot x \quad \forall x \in F$. Ist $a \in P$ und $b \in P^*$, so ist $a \cdot b \in P$, und da $F(+, \cdot)$ rechtsalternativ ist, folgt: $r_{a \cdot b} \cdot b = (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = r_a \cdot r_b \cdot b$, d.h. es ist $r_{a \cdot b} = r_a \cdot r_b$. Also gilt $\forall a \in P, \forall b \in P^*, \forall c \in F$: $(a \cdot b) \cdot c = r_{a \cdot b} \cdot c = r_a \cdot r_b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Für rechtsalternative linksreguläre Fastringe gilt sogar:

(3.38). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein bzgl. $P := P(F)$ archimedisch schwach angeordneter rechtsalternativer linksregulärer Fastring mit $F \neq \{0\}$, so ist $P^*(\cdot, \leq)$ o-isomorph zu einer Unterhalbgruppe von $P(R)^*(\cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung; insbeson-

Es sei $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach angeordnete kommutative reguläre Halbgruppe.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$. Da $F(+, \cdot)$ linksregulär ist, gilt offensichtlich $\forall x, y \in P$: genau dann ist $r_x = r_y$, wenn $x = y$ ist. Da $\forall x, y \in P$

$r_x \cdot r_y = r_{x \cdot y} = r_{y \cdot x} = r_y \cdot r_x$ ist (siehe dazu den Beweis von (3.37)), gilt also $\forall x, y \in P^*$: $r_x \cdot y = x \cdot y = y \cdot x = r_y \cdot x$. Sei $a \in P^*$ ein festes Element und $c := r_a \cdot a^{-1} \in P(R)$. Dann gilt $\forall x \in P^*$:

$r_x = c \cdot x$, und somit ist $\forall x, y \in P^*$ $x \cdot y = c \cdot x \cdot y$. Da $F(+, \cdot)$ linksregulär und $|P^*| \geq 2$ ist, ist $c > 0$. Also ist $P^*(\cdot)$ eine kommutative reguläre Halbgruppe. Sei $H := c \cdot P^* \subset P(R)^*$, und die Abbildung $f: P^* \rightarrow H$ sei definiert durch $f(x) := c \cdot x \quad \forall x \in P^*$. Dann ist f offenbar ein ϕ -Isomorphismus von $P^*(\cdot, \leq)$ auf die Unterhalbgruppe $H(\cdot, \leq)$ von $P(R)^*(\cdot, \leq)$. Da $P(R)^*(\cdot, \leq)$ archimedisch angeordnet ist, ist $H(\cdot, \leq)$ und somit auch $P^*(\cdot, \leq)$ archimedisch angeordnet.

Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsalternativer linksregulärer nullsymmetrischer Fastring, so ist also $P(+, \cdot)$ ein assoziativer kommutativer Halbring. Es gilt sogar:

(3.38). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter rechtsalternativer linksregulärer Fastring mit dem Positivitätsaxiom, so sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (i) $F(+, \cdot)$ ist nullsymmetrisch,
- (ii) $P(\cdot)$ ist assoziativ,
- (iii) $P(\cdot)$ ist kommutativ.

Beweis: Wir haben nur noch zu zeigen, daß (i) aus (ii) folgt. Sei o.B.d.A. $F \neq \{0\}$ und $a \in P^*$. Da $P(\cdot)$ assoziativ ist, gilt: $(0 \cdot a) \cdot (0 \cdot a) = 0 \cdot ((a \cdot 0) \cdot a) = 0 \cdot (0 \cdot a)$, und da $F(+, \cdot)$ linksregulär ist, folgt daraus $0 \cdot a = 0$. Also ist $F(+, \cdot)$ nullsymmetrisch.

Für negativ-treue Fastringe erhält man aus (3.37):

(3.40). Ist $F(+, \circ, \leq)$ ein archimedisch schwach angeordneter negativ-treuer Fastring, so sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (i) $F(+, \circ)$ ist rechtsalternativ,
- (ii) $F(+, \circ)$ ist alternativ,
- (iii) $F(+, \circ)$ ist biassoziativ,
- (iv) $F(+, \circ)$ ist assoziativ.

Aus (2.2) und (3.38) folgt unmittelbar:

SATZ 3.41. Jeder archimedisch schwach angeordnete rechtsalternative linksreguläre negativ-treue Fastring ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Die Aussage (3.41) folgt auch aus (1.32) und (4.32).

Es gibt aber archimedisch schwach angeordnete assoziative negativ-treue Fastringe, die nicht distributiv sind, wie das Beispiel (2.28) zeigt.

§4. SPEZIELLE KLASSEN ARCHIMEDISCH SCHWACH QUADRATISCH ANGEORDNETER FASTRINGE

Zunächst wird hier ein Verfahren angegeben, nach dem sich (bis auf o-Isomorphie) sämtliche archimedisch schwach quadratisch angeordnete Fastringe konstruieren lassen. Dabei sei im folgenden $F(+)$ eine Untergruppe von $R(+)$ mit $F \neq \{0\}$,

$\mathbb{F} := \{F_i := F(+, \circ_i, \leq); i \in I\}$ die Menge aller (bzgl. der induzierten natürlichen Anordnung) archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastringe über der additiven Gruppe $F(+)$ und

$I(F) := \{x \in R; x \cdot F \subset F\}$. Dann ist offenbar $I(F)(+, \cdot)$ ein Unterring der reellen Zahlen $R(+, \cdot)$ mit $1 \in I(F) \subset F \cdot (F^*)^{-1}$, und es gilt:

(4.1). Es ist $I(F) = F^*$ genau dann, wenn $F(+, \cdot)$ ein Unterring von $R(+, \cdot)$ mit $1 \in F$ ist.

Da $I(F)^*(\cdot)$ i. allg. keine Gruppe ist, definiert man $I_0(F) := \{x \in R; x \cdot F = F\}$. Dann ist $I_0(F) = \{x \in I(F)^*; x^{-1} \in I(F)\}$, und somit ist $I_0(F)(\cdot)$ die größte in $I(F)^*$ enthaltene Untergruppe von $R^*(\cdot)$. Es gilt weiterhin:

(4.2). Es ist $I_0(F) = F^*$ genau dann, wenn $F(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$ ist.

Ist $F(+, \cdot)$ ein Körper, so ist also nach (4.1) und (4.2) $I_0(F) = I(F)^*$, d.h. auch $I(F)(+, \cdot)$ ist ein Körper. Ist umgekehrt $I_0(F) = I(F)^*$, so ist aber $F(+, \cdot)$ nicht notwendig ein Ring, wie das Beispiel $F := \mathbb{Q} + t \cdot \mathbb{Q}$ (mit $t \in \mathbb{R}$ transzendent über $\mathbb{Q}$) zeigt.

Sei nun $F_i := F(+, \circ_i, \leq) \in \mathbb{F}$ und $a \in F$. Ist $a \geq 0$ (bzw. $a \leq 0$), so ist die zugehörige Linkstranslation a_1 von $F(+, \circ_i)$ ein isotoner (bzw. antitoner) Endomorphismus von $F(+, \leq)$. Also gibt es nach (2.1) zu jedem Element $a \in F$ eine reelle Zahl $r_a \in \mathbb{R}$ mit:

- (1) $\forall a, b \in F$ ist $a \circ_i b = r_a \cdot b$,
- (2) $\forall a \in F$ ist $r_a \in I(F)$,

(3) $r_a \geq 0$, falls $a \geq 0$ ist,

(4) $r_a \leq 0$, falls $a \leq 0$ ist;

insbesondere ist also $r_0 = 0$. Somit folgt:

(4.3). Die Abbildung $r_{F_i} : \begin{cases} F \longrightarrow I(F) \\ x \longrightarrow r_x \end{cases}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall a \in F$ mit $a \geq 0$ ist $r_{F_i}(a) \geq 0$,

(ii) $\forall a \in F$ mit $a \leq 0$ ist $r_{F_i}(a) \leq 0$,

(damit besitzt r_{F_i} auch die Eigenschaft (iii): $r_{F_i}(0) = 0$);

und es gilt $\forall a, b \in F: a \circ_i b = r_{F_i}(a) \cdot b$.

Umgekehrt gilt offenbar:

(4.4). Ist $r: F \longrightarrow I(F)$ eine beliebige Abbildung von F in $I(F)$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) von (4.3), so ist

$F_r := F(+, \circ, \leq) \in \mathbb{F}$ mit $a \cdot b := r(a) \cdot b \quad \forall a, b \in F$.

Die in (4.3) und (4.4) definierten Zuordnungen sind offensichtlich bijektiv, d.h. es gilt:

(4.5). Die archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastringe über der Gruppe $F(+, \leq)$ und die Abbildungen von F in $I(F)$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) von (4.3) entsprechen sich (bzgl. der in (4.3) und (4.4) definierten Zuordnungen) umkehrbar eindeutig.

Da für jeden archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastring $F(+, \circ, \leq)$ die angeordnete additive Gruppe $F(+, \leq)$ o-isomorph zu einer Untergruppe von $R(+, \leq)$ ist, gilt also:

SATZ 4.6. Bis auf o-Isomorphie kann die Klasse der archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastringe eindeutig nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Untergruppenverband von $R(+)$ konstruiert werden.

Ist $F(+, \circ, \leq)$ ein archimedisch schwach quadratisch angeordne-

ter Fastring, so ist bekanntlich $F(+, \tau_0)$ bzgl. der Ordnungstopologie τ_0 eine topologische Gruppe (vgl. etwa FUCHS [14]), und offenbar sind $\forall a \in F$ die zugehörigen Linkstranslationen a_l von $F(+, \circ)$ stetig. I. allg. müssen aber weder die Rechtstranslationen a_r von $F(+, \circ)$ (mit $a \in F$) noch die Fastringmultiplikation " $\circ$ " stetige Operationen sein; ist aber o.B.d.A. $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ und $r: F \rightarrow I(F)$ die nach (4.5) zu $F(+, \circ, \leq)$ gehörige Abbildung, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (i) die Fastringmultiplikation " $\circ$ " ist stetig,
- (ii) für mindestens ein Element $a \in F^*$ ist die zugehörige Rechtstranslation a_r von $F(+, \circ)$ stetig,
- (iii) die Abbildung $r: F \rightarrow I(F)$ ist stetig.

Ist umgekehrt $F(+, \leq)$ eine archimedisch dicht angeordnete Gruppe (d.h. zu je zwei Elementen $a, b \in F$ mit $a < b$ gibt es ein $x \in F$ mit $a < x < b$) mit $F \neq \{0\}$, $F(+, \circ)$ ein Fastring über der Gruppe $F(+)$, und sind $\forall a \in F$ die zugehörigen Linkstranslationen a_l von $F(+, \circ)$ stetig (bzgl. der Ordnungstopologie τ_0), so ist offenbar $F(+, \circ, \leq)$ genau dann ein archimedisch schwach quadratisch angeordneter Fastring, wenn es zu jedem Element $a \in F$ ein $b_a \in F^*$ gibt mit $\text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b_a) \cdot \text{sign}(a \circ b_a) \in \{0, 1\}$ (vgl. Def. (5.1)) und $0 \circ b_0 = 0$. Ist $F(+, \leq)$ nicht dicht angeordnet, so gilt diese Aussage i. allg. nicht, wie das Beispiel $F(+, \leq) := (Z + \sqrt{2} \cdot Z)(+, \leq)$ zeigt.

Im folgenden sollen nun spezielle Klassen archimedisch schwach quadratisch angeordneter Fastringe mit Hilfe der nach (4.5) zugehörigen Abbildungen näher untersucht werden. Dabei sei $F(+, \circ, \leq)$ stets, falls nicht ausdrücklich anders vermerkt, ein bzgl. $P := P(F)$ archimedisch schwach quadratisch angeordneter Fastring mit $F \neq \{0\}$, $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung und $r: F \rightarrow I(F)$ die nach

(4.5) zu $F(+, \circ, \leq)$ gehörige Abbildung von F in $I(F)$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von (4.3).

(4.7). $F(+, \circ, \leq)$ ist genau dann archimedisch angeordnet, wenn r isoton ist.

Beweis: $F(+, \circ, \leq)$ ist genau dann angeordnet, wenn $\forall a, b, c \in F$ mit $a \leq b$ und $c \geq 0$ gilt: $r(a) \cdot c = a \cdot c \leq b \cdot c = r(b) \cdot c$, d.h. $\forall a, b \in F$ mit $a \leq b$ ist $r(a) \leq r(b)$, d.h. aber: r ist isoton.

(4.8). $F(+, \circ)$ ist genau dann rechtsregulär, wenn $r(F^*) \subset I(F)^*$ ist.

Beweis: Nach (1.10) ist $F(+, \circ)$ genau dann rechtsregulär, wenn $F(+, \circ)$ nullteilerfrei ist, d.h. $\forall a, b \in F^*$ ist $r(a) \cdot b = a \cdot b \neq 0$, und d.h. $\forall a \in F^*$ ist $r(a) \neq 0$.

(4.9). $P(\circ)$ ist genau dann rechtslösbar, wenn $r(P^*) \subset I_0(F)$ ist.

Beweis: $P(\circ)$ ist genau dann rechtslösbar, wenn $\forall a \in P^*$ gilt: $r(a) \cdot P = a \cdot P = P$, d.h. $\forall a \in P^*$ ist $r(a) \in I_0(F)$.

(4.10). $F(+, \circ)$ ist genau dann rechtslösbar, wenn $r(F^*) \subset I_0(F)$ ist.

Damit folgt unmittelbar aus (4.8) und (4.10):

(4.11). Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete rechtslösbare Fastring ist rechtseindeutiglösbar.

(4.12). $F(+, \circ)$ ist genau dann linksregulär, wenn r injektiv ist.

(4.13). $P(\circ)$ ist genau dann linkslösbar, wenn $r(P) = P(I(F)) = P \cdot (P^*)^{-1}$ ist.

Beweis: $P(\circ)$ ist genau dann linkslösbar, wenn es $\forall a, b \in P$ mit $b \neq 0$ ein $x \in P$ gibt mit $r(x) \cdot b = x \cdot b = a$, d.h. $\forall a, b \in P$ mit $b \neq 0$ gibt es ein $x \in P$ mit $a \cdot b^{-1} = r(x) \in r(P)$, d.h. aber, es ist $P \cdot (P^*)^{-1} \subset r(P)$ und damit gleichwertig $r(P) = P(I(F)) = P \cdot (P^*)^{-1}$,

da stets $r(P) \subset P(I(F)) \subset P \cdot (P^*)^{-1}$ ist.

(4.14). $F(+, \cdot)$ ist genau dann linkslösbar, wenn $r(F) = I(F) = P \cdot (P^*)^{-1}$ ist; insbesondere ist dann r surjektiv.

Ist $1 \in r(F)$, so gibt es ein Element $e \in F^*$ mit $r(e) = 1$, so daß $\forall a \in F \quad e \cdot a = r(e) \cdot a = 1 \cdot a = a$ ist. Also gilt nach (4.13):

(4.15). Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete Fastring mit linkslösbarem Positivitätsbereich ist linksunitär.

(4.16). Ist $P(\cdot)$ linkslösbar und $1 \in F$, so ist $F(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$.

Beweis: Ist $P(\cdot)$ linkslösbar, so ist nach (4.13)

$P(I(F)) = P \cdot (P^*)^{-1}$. Da $1 \in P$ ist, folgt: $(P^*)^{-1} \subset P(I(F)) \subset I(F)$, d.h. es ist $(P^*)^{-1} \cdot F \subset F$. Also ist $F(+, \cdot)$ ein Körper.

Da offenbar jede Untergruppe $F(+, \leq)$ von $R(+, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ o-isomorph zu einer Untergruppe $F'(+, \leq)$ von $R(+, \leq)$ mit $1 \in F'$ ist, gilt nach (4.6) und (4.16) für eine beliebige angeordnete Gruppe $F(+, \leq)$ mit $|F| \geq 2$ (siehe dazu auch TIMM [49]):

SATZ 4.17. Ist $F(+, \leq)$ eine bzgl. $P := P(F)$ angeordnete Gruppe mit $F \neq \{0\}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (i) $F(+, \leq)$ ist archimedisch angeordnet und besitzt eine auf P transitiv operierende o-Automorphismengruppe,
- (ii) $F(+, \leq)$ ist die additive Gruppe eines archimedisch angeordneten Körpers,
- (iii) $F(+, \leq)$ ist die additive Gruppe eines archimedisch schwach quadratisch angeordneten linkslösbaren Fastrings,
- (iv) $F(+, \leq)$ ist die additive Gruppe eines archimedisch schwach quadratisch angeordneten Fastrings mit linkslösbarem Positivitätsbereich P .

Da der Körper der reellen Zahlen bis auf o-Isomorphie der einzige archimedisch angeordnete Körper ist, der die Bedingung

(S) von (2.4) erfüllt, gilt also nach (2.4) und (4.17):

(4.18). $F(+, \leq)$ ist genau dann die additive Gruppe eines schwach quadratisch angeordneten linkslösbaren Fastring mit $F \neq \{0\}$, der die Bedingung (S) von (2.4) erfüllt, wenn $F(+, \leq)$ o-isomorph zu $R(+, \leq)$ ist.

(4.19). $F(+, \circ)$ ist genau dann planar, wenn $\forall a, b \in F$ mit $a \neq b$ gilt: $r(a) - r(b) \in I_0(F)$.

Beweis: $F(+, \circ)$ ist genau dann planar, wenn es $\forall a, b, c \in F$ mit $a \neq b$ genau ein Element $x \in F$ gibt mit

$c = -b \circ x + a \circ x = -r(b) \cdot x + r(a) \cdot x = (r(a) - r(b)) \cdot x$, d.h. $\forall a, b \in F$ mit $a \neq b$ ist $(r(a) - r(b)) \cdot F = F$, da stets $(r(a) - r(b)) \cdot F \subset F$ ist.

(4.20). Ist $F(+, \leq)$ die additive Gruppe eines archimedisch angeordneten Rings mit nichttrivialer Multiplikation und $F \neq \{0\}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (i) $F(+, \leq)$ ist die additive Gruppe eines archimedisch angeordneten Körpers,
- (ii) jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete rechtsreguläre Fastring über der additiven Gruppe $F(+, \leq)$ ist rechtseindeutig lösbar,
- (iii) jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete linksreguläre Fastring über der additiven Gruppe $F(+, \leq)$ ist planar.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \cdot, \leq)$ ein Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$.

Ist $F(+, \cdot)$ sogar ein Körper, so gilt nach (4.1) und (4.2):

$I(F)^* = I_0(F)$. Ist nun $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach quadratisch angeordneter rechts- (bzw. links-) regulärer Fastring über der additiven Gruppe $F(+, \leq)$, so ist $F(+, \cdot)$ nach (4.8) und (4.10) (bzw. (4.12) und (4.19)) rechtslösbar (bzw. planar).

Ist umgekehrt jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete rechts- (bzw. links-) reguläre Fastring über der additiven

Gruppe $F(+, \leq)$ rechtslösbar (bzw. planar), so muß also insbesondere $F(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$ sein.

In der Aussage (4.20) kann auf die Voraussetzung, daß $F(+, \leq)$ die additive Gruppe eines archimedisch angeordneten Rings mit nichttrivialer Multiplikation ist, nicht verzichtet werden, wie die Bemerkung zu den Aussagen (4.1) und (4.2) zeigt.

Aus (4.17) und (4.20) folgt sofort:

(4.21). Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete rechtsreguläre Fastring mit linkslösbarem Positivitätsbereich ist rechtslösbar.

(4.22). Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete linksreguläre Fastring mit linkslösbarem Positivitätsbereich ist planar; insbesondere ist jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete linkseindeutiglösbare Fastring ein planarer Divisionsfastring.

(4.23). $F(+, \cdot)$ ist genau dann negativ-treu, wenn $\forall a \in F$ gilt: $r(-a) = -r(a)$.

Ist $F(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$, so erfüllt eine Abbildung $r: F \rightarrow I(F)$ genau dann die Bedingungen (i) und (ii) von (4.3) und die Bedingungen von (4.7, 8, 10, 12, 14, 19, 23), wenn r bijektiv, isoton und $\forall a \in F \quad r(-a) = -r(a)$ ist, für $F(+, \cdot) := R(+, \cdot)$ z.B. die Funktionen $r(x) := x^{2n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Also gilt:

(4.24). Es gibt archimedisch angeordnete planare negativ-treue linksunitäre Divisionsfastringe, die nicht o-isomorph zu einem Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ sind.

(4.25). $F(+, \cdot)$ ist genau dann potenzassoziativ, wenn $\forall a \in F, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $r(r(a)^n \cdot a) = r(a)^{n+1}$.

Beweis: Im folgenden sei die n -te Potenz (mit $n \in \mathbb{N}$) des Elements $a \in F$ bzgl. der Fastringmultiplikation " $\circ$ " mit $\dot{a}^n$ bezeichnet, um Verwechslungen mit den Potenzen a^n von a bzgl. der Multiplikation " $\cdot$ " zu vermeiden. Dann gilt i. allg. $\forall a \in F, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\dot{a}^{n+1} = r(a)^n \cdot a.$$

Ist nun $F(+, \circ)$ potenzassoziativ und $a \in F^*$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\begin{aligned} r(r(a)^n \cdot a) \cdot a &= r(\dot{a}^{n+1}) \cdot a = \dot{a}^{n+1} \cdot a = a \cdot \dot{a}^{n+1} = r(a) \cdot \dot{a}^{n+1} = \\ &= r(a) \cdot r(a)^n \cdot a, \text{ und daraus folgt: } r(r(a)^n \cdot a) = r(a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt $\forall a \in F, \forall n \in \mathbb{N}$: $r(r(a)^n \cdot a) = r(a)^{n+1}$, und ist $a \in F$,

$$\begin{aligned} i, j, k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } i+j &= k+l, \text{ so folgt: } \dot{a}^i \cdot \dot{a}^j = r(\dot{a}^i) \cdot \dot{a}^j = \\ &= r(r(a)^{i-1} \cdot a) \cdot r(a)^{j-1} \cdot a = r(a)^i \cdot r(a)^{j-1} \cdot a = r(a)^{i+j-1} \cdot a = \\ &= r(a)^{k+l-1} \cdot a = \dot{a}^k \cdot \dot{a}^l. \text{ Also ist } F(+, \circ) \text{ potenzassoziativ.} \end{aligned}$$

(4.26). $F(+, \circ)$ ist genau dann linksalternativ, wenn $\forall a \in F$ gilt:
 $r(r(a) \cdot a) = r(a) \cdot r(a).$

Beweis: $F(+, \circ)$ ist genau dann linksalternativ, wenn $\forall a, b \in F$ gilt: $r(r(a) \cdot a) \cdot b = (a \circ a) \circ b = a \circ (a \circ b) = r(a) \cdot r(a) \cdot b$, d.h. $\forall a \in F$ ist $r(r(a) \cdot a) = r(a) \cdot r(a).$

Damit folgt unmittelbar aus (4.25) und (4.26):

(4.27). Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete potenzassoziative Fastring ist linksalternativ.

(4.28). $F(+, \circ)$ ist genau dann rechtsalternativ, wenn $\forall a, b \in F$ gilt:
 $r(r(a) \cdot b) = r(a) \cdot r(b).$

Beweis: $F(+, \circ)$ ist genau dann rechtsalternativ, wenn $\forall a, b \in F$ gilt: $r(r(a) \cdot b) \cdot b = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = r(a) \cdot r(b) \cdot b$, d.h. $\forall a, b \in F$ ist $r(r(a) \cdot b) = r(a) \cdot r(b).$

(4.29). $F(+, \circ)$ ist genau dann assoziativ, wenn $\forall a, b \in F$ gilt:
 $r(r(a) \cdot b) = r(a) \cdot r(b).$

Beweis: $F(+, \circ)$ ist genau dann assoziativ, wenn $\forall a, b, c \in F$ gilt: $r(r(a) \cdot b) \cdot c = (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = r(a) \cdot r(b) \cdot c$, d.h. $\forall a, b \in F$ ist

$$r(r(a) \cdot b) = r(a) \cdot r(b).$$

Somit gilt nach (4.28) und (4.29):

(4.30). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach quadratisch angeordneter Fastring, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (i) $F(+, \cdot)$ ist rechtsalternativ,
- (ii) $F(+, \cdot)$ ist alternativ,
- (iii) $F(+, \cdot)$ ist biassoziativ,
- (iv) $F(+, \cdot)$ ist assoziativ.

Im folgenden soll nun eine Klasse archimedisch angeordneter assoziativer negativ-treuer rechtsregulärer linksunitärer Fast-ringe über der angeordneten Gruppe $Z(+, \leq)$ konstruiert werden, die nicht o-isomorph zu Unterringen von $R(+, \cdot, \leq)$ sind:

BSP. 4.31. Sei $F(+, \leq) := Z(+, \leq)$ und $g \in \mathbb{N}$.

Ist $g = 1$, so sei die Abbildung $r_1: F \rightarrow F$ definiert durch

$$r_1(0) := 0 \quad \text{und} \quad r_1(\pm x) := \pm 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Ist $g \geq 2$ und $x \in \mathbb{N}$, so sei $x = \sum_{i=0}^n a_i \cdot g^i$ die g -adische Darstellung von x , und die Abbildung $r_g: F \rightarrow F$ sei definiert durch

$$r_g(0) := 0 \quad \text{und} \quad r_g(\pm x) := \pm g^n.$$

Da $\forall g \in \mathbb{N}$ die Abbildungen r_g die Bedingungen von (4.7, 8, 23, 29) erfüllen und $r_g(1) = 1$ ist, gilt $\forall g \in \mathbb{N}$ für die nach (4.5) zugehörigen Fastringe F_{r_g} : F_{r_g} ist ein archimedisch angeordneter assoziativer negativ-treuer rechtsregulärer linksunitärer Fast-ring (mit linksneutralem Element 1), der aber offenbar weder kommutativ noch distributiv ist.

Der Fastring F_{r_1} ist sogar rechtslösbar (vgl. Beispiel (2.28)).

Es gilt aber:

SATZ 4.32. Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach quadratisch angeordneter rechtsalternativer linksregulärer Fastring, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von

$R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: O.B.d.A. sei $F \neq \{0\}$ und $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$. Da $F(+, \cdot)$ rechtsalternativ ist, gilt nach (4.28) $\forall a, b \in F$: $r(a \cdot b) = r(r(a) \cdot b) = r(a) \cdot r(b) = r(b) \cdot r(a) = r(r(b) \cdot a) = r(b \cdot a)$; und da r nach (4.12) injektiv ist, gilt $\forall a, b \in F$: $a \cdot b = b \cdot a$, d.h. $F(\cdot)$ ist kommutativ. Also ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch angeordneter kommutativer Ring und somit nach (2.2) o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$.

Es gibt aber archimedisch angeordnete potenzassoziative planare negativ-treue linksunitäre Fastringe, die weder kommutativ noch assoziativ sind:

BSP. 4.33. Sei $F(+, \leq) := R(+, \leq)$, und die Abbildung $r: F \rightarrow F$ sei definiert durch $r(x) := \begin{cases} a \cdot x, & \text{falls } |x| \leq c \\ b \cdot x & \text{sonst} \end{cases}$ mit $a, b > 0$, $c \geq 1$ und $a \leq c^{-1} \leq b$. Dann ist offenbar F_r ein archimedisch angeordneter potenzassoziativer planarer negativ-treuer Fastring, der genau dann nicht assoziativ ist, wenn $a \neq b$ ist.

Weiterhin gilt: F_r ist genau dann linksunitär, wenn $a = c^{-1}$ ist.

SATZ 4.34. Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein archimedisch schwach quadratisch angeordneter rechtsalternativer Fastring mit $F \neq \{0\}$ und ist $P(F)(\cdot)$ linkslösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$ mit $1 \in F$. Dann ist nach (4.1) und (4.16) $I(F) = F$, und somit ist nach (4.14) r eine Abbildung von F auf sich. Sei $c := r(1) \in F$. Da $F(+, \cdot)$ rechtsalternativ ist, gilt nach (4.28) $\forall a \in F$: $r(r(a)) = r(r(a) \cdot 1) = r(a) \cdot r(1) = r(a) \cdot c$. Da $r(F) = F$ ist, folgt $\forall a \in F$: $r(a) = c \cdot a$, d.h. es ist $r = c \cdot \text{id}_F$, und somit ist $c \neq 0$. Damit ist r injektiv und $F(+, \cdot)$ nach (4.12) linksregulär.

Also ist $F(+, \cdot, \leq)$ nach (4.32) ϕ -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$.

(4.35). $F(+, \cdot)$ ist genau dann linksunitär, wenn $1 \in r(F)$ ist.

Beweis: $F(+, \cdot)$ ist genau dann linksunitär, wenn es ein Element $e \in F$ gibt mit $r(e) \cdot a = e \cdot a = a \quad \forall a \in F$, d.h. es gibt ein Element $e \in F$ mit $r(e) = 1$.

(4.36). $F(+, \cdot)$ ist genau dann rechtsunitär, wenn es ein Element $e \in P(F)^*$ gibt mit $r(a) = a \cdot e^{-1} \quad \forall a \in F$.

Beweis: Nach (1.39) ist $F(+, \cdot)$ genau dann rechtsunitär, wenn es ein Element $e \in P(F)^*$ gibt mit $r(a) \cdot e = a \cdot e = a \quad \forall a \in F$, d.h. es gibt ein Element $e \in P(F)^*$ mit $r(a) = a \cdot e^{-1} \quad \forall a \in F$.

Hieraus folgt sofort:

SATZ 4.37. Jeder archimedisch schwach quadratisch angeordnete rechtsunitäre Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist ϕ -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, 1, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Beweis: O.B.d.A. sei $F(+, \leq)$ eine Untergruppe von $R(+, \leq)$. Dann gilt nach (4.36) $\forall a, b \in F$:

$$a \cdot b = r(a) \cdot b = (a \cdot e^{-1}) \cdot b = (b \cdot e^{-1}) \cdot a = r(b) \cdot a = b \cdot a, \text{ d.h.}$$

$F(+, \cdot, \leq)$ ist ein archimedisch angeordneter kommutativer Ring und somit nach (2.2) ϕ -isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterring von $R(+, \cdot, \leq)$.

Die Aussage (4.37) läßt sich auch aus (2.2) und einem Ergebnis von PICKERT [35] folgern. Der vorstehende Beweis wird dennoch aufgeführt, da er wesentlich kürzer und m.E. auch direkter ist.

DEF. 4.38. Ein nullsymmetrischer Fastring $F(+, \cdot)$ mit Inversen heißt Links- τ -System, falls $\forall a, b \in F^*$ die Linkskürzregel $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = b$ gilt (vgl. auch Def. (3.26)).

In [17] untersuchte HAVEL Ebenen über Links- $\mathfrak{O}$ -Systemen.

Es gilt nun insbesondere:

KOR. 4.39. Jedes archimedisch schwach quadratisch angeordnete
Links- $\mathfrak{O}$ -System $F(+, \cdot, \leq)$ mit $F \neq \{0\}$ ist o-isomorph zu einem
eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzier-
ten natürlichen Anordnung.

§5. FORTSETZUNG ARCHIMEDISCH SCHWACHER ANORDNUNGEN

Offenbar ist jeder Unterfastring eines archimedisch schwach angeordneten Fastrings bzgl. der induzierten Ordnung wieder archimedisch schwach angeordnet. Im folgenden soll nun eine hinreichende Bedingung dafür angegeben werden, daß ein schwach angeordneter Fastring, der einen (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch schwach angeordneten Unterfastring enthält, selbst archimedisch schwach angeordnet ist. Dazu beginnen wir mit der

DEF. 5.1. Sei $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach angeordneter Fastring und $a, b \in F$.

$|a| := \max(a, -a)$ heißt der Betrag von a ;

$\text{sign}(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a > 0 \\ 0, & \text{falls } a = 0 \\ -1, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ heißt das Vorzeichen von a ;

a heißt unendlich kleiner als b (i.Z. $a \ll b$), falls $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a|n < |b|;$$

a und b heißen archimedisch äquivalent (i.Z. $a \sim b$), falls es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a|m \geq |b|$ und $|b|n \geq |a|$.

(5.2). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ ein schwach angeordneter Fastring, so gilt $\forall a \in P(F), \forall b \in F$:

$$(i) \quad \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(a \cdot b) \in \{0, 1\},$$

$$(ii) \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Sind $a, b \in F$ zwei beliebige Elemente eines schwach angeordneten Fastrings $F(+, \cdot, \leq)$, so ist i. allg. weder $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ noch $\text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(a \cdot b) \in \{0, 1\}$, wie die Beispiele (2.11) und (3.29) zeigen. Es gilt aber:

(5.3). Ein schwach angeordneter nullsymmetrischer Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann schwach quadratisch angeordnet, wenn $\forall a, b \in F \quad \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(a \cdot b) \in \{0, 1\}$ ist.

(5.4). Ein schwach quadratisch angeordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$

ist genau dann negativ-treu, wenn $\forall a, b \in F \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ist.

(5.5). Ein schwach angeordneter Fastring $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann angeordnet, wenn $\forall a, b, c \in F$ gilt:
 $\text{sign}(a-b) \cdot \text{sign}(c) \cdot \text{sign}(a \cdot c - b \cdot c) \in \{0, 1\}$.

Aus der Definition (5.1) ergeben sich weiterhin die folgenden einfachen Aussagen für schwach angeordnete Fastringe $F(+, \cdot, \leq)$ (siehe dazu auch FUCHS [14]):

(5.6). $a \ll b$ genau dann, wenn $\forall n \in \mathbb{Z}$ gilt: $an < |b|$.

(5.7). Für je zw. Elemente $a, b \in F$ ist entweder $a \ll b$ oder $b \ll a$ oder $a \sim b$.

(5.8). $F(+, \cdot, \leq)$ ist genau dann archimedisch schwach angeordnet, wenn $\forall a, b \in P(F)^*$ gilt: $a \sim b$.

(5.9). $C_1 := \{(x, y) \in F^2; x \sim y\}$ ist eine Äquivalenz (aber falls $F \neq \{0\}$ ist, keine Kongruenz) auf F .

(5.10). Aus $a \ll b$ folgt $\forall c \in F: c+a-c \ll c+b-c$.

(5.11). Aus $a \sim b, b \ll c$ und $c \sim d$ folgt: $a \ll d$.

(5.12). $C_2 := \{(x, y) \in F^2; \text{entweder } x \ll y \text{ oder } x = y\}$ ist eine Halbordnung (aber falls $F \neq \{0\}$ ist, keine (Total-)Ordnung) auf F .

(5.13). $C_3 := \{([x], [y]) \in (F/C_1)^2; \text{entweder } x \ll y \text{ oder } x \sim y\}$ ist eine Ordnung auf F/C_1 .

(5.14). Aus $a \ll b$ folgt: $a \ll a+b, b+a$.

Aus $a \ll b$ folgt natürlich $\forall n \in \mathbb{Z}: an \ll b$. Es gilt sogar:

(5.15). Aus $a, b \ll c$ folgt: $a+b \ll c$.

I. allg. impliziert aber $a_i \ll b_i$ ($i = 1, 2$) nicht notwendig $a_1 + a_2 \ll b_1 + b_2$.

Nach (5.12), (5.14) und (5.15) erhält man nun:

(5.16). Aus $a_1 \ll a_2 \ll \dots \ll a_n$ folgt: $a_1 \ll a_1 + \dots + a_{n-1} \ll a_n$ und $a_1 \ll a_{n-1} + \dots + a_1 \ll a_n$.

Da $\forall a \in F^* \quad 0 \ll a$ ist, gilt nach (5.15) für die Menge $U_a := \{x \in F; x \ll a\}$:

(5.17). U_a ist $\forall a \in F^*$ eine konvexe Untergruppe von $F(+, \leq)$.

Beweis: Sei $x, y \in U_a$, $z \in F$ mit $x \leq z \leq y$. Dann ist

$|z| \leq \max(|x|, |y|)$, und somit gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$|z|n \leq \max(|x|n, |y|n) < |a|$, d.h. es ist $z \ll a$. Also ist U_a konvex.

(5.18). Aus $a \ll b$ und $c \geq 0$ folgt: entweder ist $c \cdot a \ll c \cdot b$ oder $c \cdot a = c \cdot b = 0$.

Beweis: Sei $a \ll b$ und $c \geq 0$. Dann ist $|c \cdot a| = |c| \cdot |a|$ und

$|c \cdot b| = |c| \cdot |b|$, und damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$|c \cdot a|n = (|c| \cdot |a|)n = |c| \cdot (|a|n) \leq |c| \cdot |b| = |c \cdot b|$, d.h. entweder ist $|c \cdot a|n < |c \cdot b| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und somit $c \cdot a \ll c \cdot b$, oder es gibt eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|c \cdot a|n_0 = |c \cdot b|$, und dann muß $|c \cdot a| = 0$ und damit $c \cdot a = c \cdot b = 0$ sein.

II. allg. impliziert $a \ll b$ und $c \leq 0$ weder $c \cdot a \ll c \cdot b$ noch $c \cdot a = c \cdot b = 0$. Es gilt aber:

(5.19). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ schwach quadratisch angeordnet und $a, b, c \in F$ mit $a \ll b$ und $c \leq 0$, so ist entweder $c \cdot a \ll c \cdot b$ oder $c \cdot a = c \cdot b = 0$.

(5.20). Aus $a \sim b$ und $c \geq 0$ folgt: $c \cdot a \sim c \cdot b$.

Beweis: Sei $a \sim b$ und $c \geq 0$. Dann gibt es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|a|m \geq |b|$ und $|b|n \geq |a|$. Da $c \geq 0$ ist, ist

$|c \cdot a| = |c| \cdot |a|$ und $|c \cdot b| = |c| \cdot |b|$, und somit gilt:

$|c \cdot a|m = (|c| \cdot |a|)m = |c| \cdot (|a|m) \geq |c| \cdot |b| = |c \cdot b|$ und

$|c \cdot b|n \geq |c \cdot a|$, d.h. es ist $c \cdot a \sim c \cdot b$.

(5.21). Ist $F(+, \cdot, \leq)$ schwach quadratisch angeordnet und $a, b, c \in F$ mit $a \sim b$ und $c \leq 0$, so ist $c \cdot a \sim c \cdot b$.

Aus $a \sim b$ (bzw. $a \ll b$) und $c \geq 0$ folgt i. allg. nicht notwendig $a \cdot c \sim b \cdot c$ (bzw. $a \cdot c \ll b \cdot c$ oder $a \cdot c = b \cdot c = 0$), wie das folgende Beispiel zeigt:

BSP. 5.22. Sei $F(+, \leq)$ die lexikographisch angeordnete direkte Summe der angeordneten Gruppen $Q(+, \leq)$ und $Q(+, \leq)$, und $\forall a, b \in F$ sei $a \cdot b := \begin{cases} b, & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $F(+, \cdot, \leq)$ offenbar ein angeordneter assoziativer Fastring, und $\forall a \in P(F)^*, \forall c \in F^*$ gilt:

- (1) $a \sim -a$ und $(-a) \cdot c = 0 \ll c = a \cdot c$,
- (2) $(0, 1) \ll (-1, 0)$ und $(-1, 0) \cdot c = 0 \ll c = (0, 1) \cdot c$.

DEF. 5.23. Sei $F(+, \cdot)$ ein Fastring und $U \subset F$ ein Unterfastring von $F(+, \cdot)$. $F(+, \cdot)$ heißt algebraisch über U , falls es zu jedem Element $a \in F^*$ endlich viele Elemente $u_0, \dots, u_n \in U$ gibt mit $a^n \cdot u_n + \dots + a \cdot u_1 + u_0 = 0$ und $u_0 \neq 0$.

(5.24). Ist $F(+, \cdot)$ biassoziativ und nullteilerfrei, so ist $F(+, \cdot)$ genau dann algebraisch über einem Unterfastring U von $F(+, \cdot)$, wenn es zu jedem Element $a \in F^*$ endlich viele Elemente $u_0, \dots, u_n \in U$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, mit $a^n \cdot u_n + \dots + a \cdot u_1 + u_0 = 0$.

Beweis: Sei $a \in F^*$ und $u_0, \dots, u_n \in U$ mit $a^n \cdot u_n + \dots + a \cdot u_1 + u_0 = 0$, $u_m \neq 0$ (mit o.B.d.A. $0 < m < n$) und $u_i = 0$ für $i = 0, \dots, m-1$.

Da $F(+, \cdot)$ biassoziativ ist, folgt:

$$0 = a^n \cdot u_n + \dots + a^m \cdot u_m = a^m \cdot (a^{n-m} \cdot u_n + \dots + a \cdot u_{m+1} + u_m);$$

und da $F(+, \cdot)$ nullteilerfrei und somit $a^m \neq 0$ ist, ist

$$a^{n-m} \cdot u_n + \dots + a \cdot u_{m+1} + u_m = 0 \quad \text{mit} \quad u_m \neq 0.$$

(5.25). Ist $F(+, \cdot)$ eine endlich dimensionale nullteilerfreie rechtsseitige Fastalgebra über einem Unterkörper K von $F(+, \cdot)$, so ist $F(+, \cdot)$ rechtseindeutiglösbar und algebraisch über K .

Beweis: Da $F(+, \cdot)$ eine nullteilerfreie rechtsseitige Fastalgebra über dem Unterkörper K von $F(+, \cdot)$ ist, sind $\forall a \in F^*$ die Linkstranslationen a_1 von $F(+, \cdot)$ injektive lineare Abbildungen des K -

Vektorraums $F(+)$ in sich, und wegen der endlichen Dimension von $F(+)$ ist $a_1 \forall a \in F^*$ sogar bijektiv. Also ist $F(+, \circ)$ rechtseindeutiglösbar.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ die Dimension von $F(+)$, $e \in K$ das Einselement von $K(+, \circ)$ und $a \in F^*$. Dann sind die Elemente $e, a, \dots, a^n$ linear abhängig, d.h. es gibt Elemente $k_0, \dots, k_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, mit $a^n \cdot k_n + \dots + a \cdot k_1 + k_0 = 0$. Sei o.B.d.A. $k_m \neq 0$ mit

$0 < m < n$ und $k_i = 0$ für $i = 0, \dots, m-1$. Da $F(+, \circ)$ eine rechtsseitige Fastalgebra über K ist, ist insbesondere

$$a^{i+1} \cdot k_{i+1} = (a \cdot a^i) \cdot k_{i+1} = a \cdot (a^i \cdot k_{i+1}) \quad (i = m, \dots, n); \text{ also ist}$$

$$\text{dann } 0 = a^n \cdot k_n + \dots + a^m \cdot k_m = a \cdot (a^{n-1} \cdot k_n + \dots + a^{m-1} \cdot k_m) =$$

$$= a \cdot (a \cdot (\dots a \cdot (a^{n-m} \cdot k_n + \dots + a \cdot k_{m+1} + k_m) \dots)). \text{ Aus der Nullteilerfreiheit von } F(+, \circ) \text{ folgt schließlich:}$$

$$a^{n-m} \cdot k_n + \dots + a \cdot k_{m+1} + k_m = 0 \text{ mit } k_m \neq 0. \text{ Also ist } F(+, \circ) \text{ algebraisch über } K.$$

Nun gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von BANASCHEWSKI [2]:

SATZ 5.26. Ist ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring $F(+, \circ, e, \leq)$ algebraisch über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch schwach angeordneten Unterfastring $U(+, \circ, e, \leq)$, so ist auch $F(+, \circ, \leq)$ archimedisch schwach angeordnet.

Beweis: O.B.d.A. sei $F \neq \{0\}$ und damit nach (1.39) $e > 0$. Da $U(+, \circ, \leq)$ archimedisch schwach angeordnet und $e \in U^*$ ist, ist nach (5.8) $\forall u \in U^* \quad e \sim u$, und somit folgt aus (5.20) $\forall x \in P(F), \forall u \in U^*$:

$$x = x \cdot e \sim x \cdot u.$$

Sei $a \in F$ mit $a > 0$ und $e \ll a$. Dann folgt aus (5.18) durch vollständige Induktion $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < a^n \ll a^{n+1}$, und damit gilt nach (5.11) und (5.12) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u_i \in U^* \quad (i = 1, \dots, n): \quad e \ll a \cdot u_1 \ll \dots \ll a^n \cdot u_n$.

Daraus folgt nach (5.16) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u_i \in U \quad (i = 1, \dots, n):$

$$e \ll a^{n+1} \cdot u_n + \dots + a \cdot u_1, \text{ falls mindestens ein } u_{i_0} \neq 0 \text{ ist.}$$

Sei $b \in F$ mit $b > 0$ und $b \ll e$. Dann folgt aus (5.18) durch vollständige Induktion: entweder ist $0 < b^{n+1} \ll b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, oder es gibt eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < b^{i+1} \ll b^i$ für $i = 1, \dots, m-1$ und $b^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Daraus folgt wie oben $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u_i \in U$ ($i = 1, \dots, n$): $b^n \cdot u_n + \dots + b \cdot u_1 \ll e$.

Da $F(+, \cdot)$ algebraisch über U ist, gibt es zu jedem $x \in F^*$ endlich viele Elemente $u_1, \dots, u_n \in U$ mit $x^n \cdot u_n + \dots + x \cdot u_1 \in U^*$. Also ist $\forall x \in P(F)^*$ weder $e \ll x$ noch $x \ll e$. Damit gilt nach (5.7) $\forall x \in P(F)^*$: $x \sim e$, und aus (5.9) folgt schließlich $\forall x, y \in P(F)^*$: $x \sim y$. Also ist $F(+, \cdot, \leq)$ nach (5.8) archimedisch schwach angeordnet.

Da ein assoziativer unitärer Ring $F(+, \cdot, e)$, der algebraisch über einem Unterkörper U von $F(+, \cdot)$ mit $e \in U$ ist, selbst ein Körper sein muß, folgt unmittelbar aus (3.1), (3.36), (4.36) und (5.25):

KOR. 5.27. Ist ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ algebraisch über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch schwach angeordneten rechts-(links-)lösbaren Unterfastring $U(+, \cdot, e, \leq)$ mit $U \neq \{0\}$ und ist eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- (i) $F(+, \cdot)$ ist negativ-treu,
- (ii) $F(+, \cdot)$ ist assoziativ,
- (iii) $F(+, \cdot, \leq)$ ist schwach quadratisch angeordnet,

so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Da jede linksseitige Fastalgebra negativ-treu ist, gilt also insbesondere:

KOR. 5.28. Ist eine schwach angeordnete linksseitige Fastalgebra $F(+, \cdot, \leq)$ algebraisch über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch angeordneten Unterkörper $U(+, \cdot, \leq)$, so ist

$F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

Als weiteren Spezialfall erhält man aus (5.25) und (5.27):

Satz 5.29. Jede schwach quadratisch angeordnete nullteilerfreie endlich dimensionale rechtsseitige Fastalgebra über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch angeordneten Unterkörper ist o-isomorph zu einem eindeutig bestimmten Unterkörper von $R(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

(5.30). Ist ein schwach angeordneter rechtsunitärer Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ algebraisch über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch schwach angeordneten Unterfastring $U(+, \cdot, e, \leq)$ und ist $\forall a \in P(U)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in U lösbar, so ist $P(F)(\cdot)$ lösbar.

Beweis: O.B.d.A. sei $U \neq \{0\}$ und somit auch $F \neq \{0\}$. Sei $f: F \rightarrow F_R$ der nach (2.24) eindeutig bestimmte o-Isomorphismus von $F(+, \cdot, e, \leq)$ auf den nach (2.19) zugeordneten Fastring $F_R(+, \cdot, 1, \leq)$. Dann ist offenbar $f(U)(+, \cdot, 1, \leq)$ der nach (2.19) zu $U(+, \cdot, e, \leq)$ gehörige Fastring. Da $F_R(+, \cdot)$ algebraisch über $f(U)(+, \cdot)$ und $\forall a \in P(F_R), \forall b \in F_R \quad a \cdot b = a \cdot b$ ist, ist auch $F_R(+, \cdot)$ algebraisch über $f(U)(+, \cdot)$. Nach (2.20) ist nun $f(U)(+, \cdot)$ ein Unterkörper von $R(+, \cdot)$, und somit ist auch $F_R(+, \cdot)$ ein Körper. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus (2.20).

Schließlich folgt nun unmittelbar aus den Aussagen (3.17), (5.26) und (5.30):

Satz 5.31. Ist ein schwach angeordneter linksregulärer rechtsunitärer Fastring $F(+, \cdot, e, \leq)$ algebraisch über einem (bzgl. der induzierten Ordnung) archimedisch schwach angeordneten Unterfastring $U(+, \cdot, e, \leq)$ mit $U \neq \{0\}$ und ist $\forall a \in P(U)^*$ die Gleichung $a \cdot x = e$ in U lösbar, so ist $F(+, \cdot, \leq)$ o-isomorph zu einem ein-

deutig bestimmten Unterkörper von $\mathbb{R}(+, \cdot, \leq)$ mit der induzierten natürlichen Anordnung.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 E. ARTIN, Geometric Algebra. Interscience Publishers Inc., New York (1957).
- 2 B. BANASCHEWSKI, Totalgeordnete Moduln. Archiv d. Math. 7 (1956) 430-440.
- 3 A. BIANCHI, Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta A - a transitivo. Boll. Un. Mat. Ital. 12 (1957) 212-226.
- 4 J.C. BEIDLEMAN, On the theory of radicals of distributively generated near-rings, I. The primitive radical. Math. Ann. 173 (1967) 89-101.
- 5 J.C. BEIDLEMAN, On the theory of radicals of distributively generated near-rings, II. The nil radical. Math. Ann. 173 (1967) 200-218.
- 6 G. BERMAN, R.J. SILVERMAN, Near-rings. Amer. Math. Monthly 66 (1959) 23-34.
- 7 R.H. BRUCK, E. KLEINFELD, The structure of alternativ division rings. Proc. Amer. Soc. 2 (1951) 878-890.
- 8 R.H. BRUCK, A survey of binary systems. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958).
- 9 L.E. DICKSON, On finite algebras. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse (1905) 358-393.
- 10 A. FRÖHLICH, Distributively generated near-rings, I. Ideal theory. Proc. London Math. Soc. 8 (1958) 76-94.
- 11 A. FRÖHLICH, Distributively generated near-rings, II. Representation theory. Proc. London Math. Soc. 8 (1958) 95-108.
- 12 L. FUCHS, On partially ordered algebras I. Colloquium Math. 13 (1966) 115-130.
- 13 L. FUCHS, On partially ordered algebras II. Acta. Sci. Math. Szeged 26 (1965) 35-41.
- 14 L. FUCHS, Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1966).
- 15 M. HALL, Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943) 229-277.
- 16 M. HALL, The theory of groups. The Macmillan Company, New York (1959).
- 17 V. HAVEL, One characterization of special translation planes. Arch. math. Brno. 3 (1967) 157-160.
- 18 D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie. 10. Aufl. Teubner, Stuttgart (1968).
- 19 V.A.V. NEON, Archimedean ordered rings (russisch). Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 9, 4(62) (1954) 237-242.
- 20 K.H. HOFMANN, Über archimedisch angeordnete, einseitig distributive Doppelloops. Archiv d. Math. 10 (1959) 348-355.
- 21 O. HÖLDER, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Cl. 53 (1901) 1-64.

- 22 M.J. KALLAHER, Moufang Veblen-Wedderburn systems. Math. Zeitschr. 105 (1968) 114-127.
- 23 H. KARZEL, Anordnungsfragen in ternären Ringen und in affinen projektiven und affinen Ebenen. Algebraical and Topological Foundations of Geometry, Oxford-London-New York-Paris (1962) 71-86.
- 24 H. KARZEL, Unendliche Dickson'sche Fastkörper. Archiv d. Math. 26 (1965) 247-256.
- 25 H. KARZEL, Inzidenzgruppen. Ausarbeitung einer Vorlesung an der Univ. Hamburg im WS 1964/65 und SS 1965.
- 26 H. KARZEL, U. WEISSNER, Desargues'sche Inzidenzgruppen und affine Fastmoduln. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31 (1967) 69-88.
- 27 W. KERBY, Angeordnete Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968) 135-146.
- 28 W. KERBY, Angeordnete Fastkörperebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 33 (1969) 4-16.
- 29 W. KERBY, H. WEFELSCHEID, Bemerkungen über Fastbereiche und scharf 2-fach transitive Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37 (1972) 20-29.
- 30 W. KERBY, H. WEFELSCHEID, Über eine scharf 3-fach transitive Gruppen angeordnete algebraische Struktur. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37 (1972) 225-235.
- 31 H. KLEIN, Kleiner Desargues'scher Satz und Dualität in projektiven Ebenen, Jahresbericht Deutsch. Math. Ver., 8 (1951) 20-31.
- 32 J.C.C. MC KINSEY, The decision problem for some classes of sentences without quantifiers. Journal of Symbolic Logic 8 (1943) 61-76.
- 33 B.H. NEUMANN, On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. 15 (1940) 203-208.
- 34 G. PICKERT, Projektive Ebenen. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955).
- 35 G. PICKERT, Kennzeichnung gewisser Homomorphismenmengen abelscher Gruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 33 (1969) 17-28.
- 36 I. PIEPER, Zur Darstellung zweiseitiger affiner Inzidenzgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 35 (1970) 121-130.
- 37 G. PILZ, Geordnete Fastringe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 35 (1970) 83-88.
- 38 G. PILZ, Direct sums of ordered near-rings. J. Algebra 18 (1971) 340-342.
- 39 G. PILZ, Zur Charakterisierung der Ordnungen in Fastringen. (Zur Publikation eingereicht).
- 40 M. REIER, Kollineationen verallgemeinerter affiner Räume. Dissertation Hamburg 1971.
- 41 L.A. SKORNJAKOV, Alternativkörper (russisch). Ukrain. Mat. Zur. 2 (1950) 70-85.
- 42 J.C.D. SPENCER, On the Desarguesian classification of projective planes. Quart. J. Math. 11 (1960) 241-257.

- 43 E. SPERNER, Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. 121 (1949) 107-130.
- 44 E. SPERNER, Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsberichte Heidelberg. Akad. Wiss. 1949, 10. Abh..
- 45 E. SPERNER, Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949) 140-154.
- 46 E. SPERNER, Weak affine spaces and their algebraic representation. Wiskunde-Seminar, Universiteit van Stellenbosch, 1966.
- 47 J. TIMM, Eine Klasse schwach binärer Doppelstrukturen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 33 (1969) 102-118.
- 48 J. TIMM, Die Lösung eines Problems von Havel. Arch. math. Brno. 6 (1970) 25-28.
- 49 J. TIMM, Über die additiven Gruppen spezieller Fastringe. Journal f. d. reine und angew. Math. 239/40 (1970) 47-54.
- 50 J. TIMM, Zur Theorie der nicht notwendig assoziativen Fastringe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 35 (1970) 14-31.
- 51 J. TIMM, Zur Konstruktion von Fastringen I. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 35 (1970) 57-74.
- 52 J. TIMM, Zur Konstruktion von Fastringen II. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 36 (1971) 16-32.
- 53 J. TIMM, Algebraische Ordnungen. Ausarbeitung einer Vorlesung an der Univ. Hamburg im WS 1970/71.
- 54 D. VAIDA, Sur les corps partiellement ordonnés. Com. Acad. Roumaine 9 (1959) 1243-1248.
- 55 H. ZASSENHAUS, Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1936) 187-220.

LEBENS LAUF

Am 1. Februar 1943 wurde ich in Hamburg als Sohn des Kaufmanns Dr. rer. pol. Ernst-Günther Küsel und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Berg, geboren. 1949 wurde ich eingeschult. 1964 machte ich am "Gymnasium in Farmsen" das Abitur. Anschließend begann ich an der Universität Hamburg mit dem Mathematikstudium, das ich 1972 mit der Diplomhauptprüfung in Mathematik abschloß. Seit dem Sommersemester 1970 bin ich am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg als wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt.

